応用ベクトル解析

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-05-07 Mon 更新: Time-stamp: "2007-05-13 Sun 13:19 JST hig"

4 復習と略解 – ベクトル場の線積分マークを計算しよう

quiz の採点と添削について　quiz は 0,2,3,4 の 4 段階採点です．ReLS に入力した結果がメールで送られます．

'× **か**' は考え方の誤り, '× **き**' は記号の使い方の誤り, '× **け**' は計算の (単純な) 誤り を示しています．

今回の問題に即したコメント　1. で, $\boldsymbol{V}(x(t),y(t)) = \boldsymbol{V}(-t^3,t) = (2(y(t))^2, 3x(t)) = (-2(t)^2, 3(-t^3))$ に注意しよう．x, y を入れ替えるとかその手のルールではない．x のところに $x(t)$ を , y のところに $y(t)$ をいれるという自然な操作.

2. で, $s(t)$ は L から求めることはできません．$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t')\right|$ から定義にしたがって求めましょう．

3. では, s の範囲は t の範囲と $s(t)$ から決まるのでそれも表示しましょう．

1. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-3t^2, 1)$ を用いて,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^2 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 (3(t)^2, 2(-t^3))\cdot(-3t^2,1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 (-9t^4 - 2t^3)\mathrm{d}t = -\frac{328}{5}.\end{aligned}$$

2. $s(t) = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t')\right| \mathrm{d}t' = \int_0^t \sqrt{10}\,\mathrm{d}t' = \sqrt{10}\cdot t.$

3. $\boldsymbol{r}_{弧長}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)) = (2,1) + (1,3)\frac{1}{\sqrt{10}}s\ (0 \le s \le 4\sqrt{10}).$

5 quiz – スカラー場の勾配ベクトル場を求めよう

1. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x, x+y)$, パラメタ表示された曲線 $C : \boldsymbol{r}_C(t) = (-2,1) + (1,-2)t\ (0 \le t \le 2)$ (始点 $(-2,1)$, 終点 $(0,-3)$) を考える．手順にしたがって

$$\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{5.1}$$

を求めよう．$\boldsymbol{n}$ は進行方向右向き単位法線ベクトル．

[1]Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2. 次のスカラー場 の勾配 $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r})$ を求めよう.

(a) $f(\boldsymbol{r}) = 2y^2 - x^3y^2$

(b) $f(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|^2 + y$

(c) $f(\boldsymbol{r}) = 1/|\boldsymbol{r}|$

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 6.2(p.121), 章末問題 [6.1]($\boldsymbol{\nabla} f$ のみ, p.148).

スカラー場 f の等高線とベクトル場 $\boldsymbol{\nabla} f$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.123, 図 6.5 より引用

pdf バージョンでは図は省略