応用ベクトル解析

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-05-14 Mon 更新: Time-stamp: ”2007-05-14 Mon 08:10 JST hig”

4　復習と略解 – ベクトル場の線積分マーク 2 を計算しよう

今回の問題に即したコメント

- もう $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t))$ は計算できるようになろうよ〜.
- 物理数学 I や線形代数でやった内積の定義 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ 瞬間的に思いだそうよ〜
- この科目では正しく記号を使わないと, 正しく計算できない確率が飛躍的にあがります. 正しい書き方しようよ〜

1. 弧長パラメタ $s(t) = \int_0^t \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t')\right| \,\mathrm{d}t' = \sqrt{5}t$. $(0 \leq s \leq 2\sqrt{5})$.
   弧長によるパラメタ表示 $\boldsymbol{r}_{弧長}(s) = (-2, 1) + (1, -2)\frac{1}{\sqrt{5}}s$, $(0 \leq s \leq 2\sqrt{5})$.
   単位接ベクトル $\boldsymbol{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$.
   右向き単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1)$.
   線積分マーク 2 の値は,
$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}s \\
&\int_0^{2\sqrt{5}} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_{弧長}(s)) \cdot \boldsymbol{n}(s) \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\sqrt{5}} \boldsymbol{V}(-2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}s, 1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}s) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1) \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\sqrt{5}} (2(-2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}s), (-2 + \tfrac{1}{\sqrt{5}}s) + (1 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}s)) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1) \,\mathrm{d}s = \cdots = 12.
\end{aligned}
$$

2. $\boldsymbol{r} = (x, y)$, $|\boldsymbol{r}| = |(x, y)| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ に注意して,
   (a) $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = (-3x^2y^2, 4y - 2x^3y)$.
   (b) $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = (2x, 2y + 1) = 2\boldsymbol{r} + (0, 1)$.
   (c) $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = (-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5 quiz – スカラー場の勾配ベクトル場を求めよう

1. スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = xy^4$ に対して勾配 $\boldsymbol{\nabla} f$ を求めよう.
2. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y, -x)$ が渦なし条件を満たすかどうか調べよう.
3. 保存場 (渦なし条件を満たすベクトル場) $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2xy^2 + 5x^4, 2x^2y + 4y)$ に対してベクトル場の線積分マーク 1

$$I = \int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{5.1}$$

を求めよう. ただし, $C : \boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$. 向きは始点が $(2, 0)$, 終点が $(0, 2)$.

Hint 渦なしだから, 始点終点を保ったままなら, 自分の好きなように積分経路 C を変更しても計算してもよい. 使った経路を図示しよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 6.30(p.143), 問題 6.32(p.143), 問題 6.34(p.144), 問題 6.37(p.146).
章末問題 [6.1]($\boldsymbol{\nabla} f$ のみ, p.148), 章末問題 [6.2](p.148).

スカラー場 f の等高線とベクトル場 ∇f

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.123, 図 6.5 より引用

pdf バージョンでは図は省略