応用ベクトル解析

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-05-28 Mon 更新: Time-stamp: "2007-05-27 Sun 16:44 JST hig"

5 復習と略解 – スカラー場の勾配ベクトル場を求めよう

先週の問題に即したコメント

- $(2,0)$ から $(0,0)$ に至る積分路を $\boldsymbol{r}(t)=(2,0)+(-1,0)t,(0\le t\le 2)$ と取った場合には

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \boldsymbol{V}(2-t,0)\cdot(-1,0)\mathrm{d}t\\ =&\int_0^2 (5(2-t)^4,\boxed{\text{不要}})\cdot(-1,0)\mathrm{d}t \quad [\boldsymbol{V}(-1(2-t),0)\ \text{となる理由はない}]\\ =&\int_0^2 -5(2-t)^4\mathrm{d}t\\ =&-\left[-5(2-t)^5\right]_0^2. \quad [\text{置換積分で}\ 2+(-1)t\ \text{からくる}\ -1]\end{aligned}$$

- まだ $\boldsymbol{V}(a,b)=(a,b)$ だと思ってる人がいる〜
- まだ内積の · 忘れる人がいる〜
- 置換積分のプロになれ〜

解答例

1. $\boldsymbol{\nabla} f=(y^4,4xy^3)$.
2. $[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}]=\frac{\partial V_y}{\partial x}-=\frac{\partial V_x}{\partial y}=-1-1=-2\neq 0$. 成立しない.
3. 積分路を変更し, C_1, C_2 の 2 つに分割する.

   $C_1:\boldsymbol{r}_1(t)=(0,0)+(1,0)t\ (0\le t\le 2)$. 始点 $\boldsymbol{r}_1(2)=(2,0)$, 終点 $\boldsymbol{r}_1(0)=(0,0)$.

   $C_2:\boldsymbol{r}_2(t)=(0,0)+(0,1)t\ (0\le t\le 2)$. 始点 $\boldsymbol{r}_2(0)=(0,0)$, 終点 $\boldsymbol{r}_2(2)=(0,2)$.

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_{C_1}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{C_2}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ &=\int_2^0 \boldsymbol{V}(t,0)\cdot(1,0)\mathrm{d}t+\int_0^2 \boldsymbol{V}(0,t)\cdot(0,1)\mathrm{d}t\\ &=\int_2^0(5t^4,\boxed{\text{不要}})\cdot(1,0)\mathrm{d}t+\int_0^2(\boxed{\text{不要}},4t)\cdot(0,1)\mathrm{d}t\\ &=-32+8=-24.\end{aligned}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

6 quiz − スカラーポテンシャルと保存力

1. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (\mathrm{e}^{x+2y} + \mathrm{e}^{-x}, 2\mathrm{e}^{x+2y} + 4)$ が保存的であることを, 渦なし条件を確かめることによって示そう.

2. 上のベクトル場と $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ という関係にあるスカラー場 $\boldsymbol{f}$ を, 線積分を使って求めよう. やまかんで答がわかってしまう人も, 若いときには苦労するために線積分でやろう.

3. 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ について, 線積分

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{6.1}$$

を求めよう. ただし C は始点 $(1, 2)$ 終点 $(2, 1)$ の原点を中心とする円弧. 上の f の結果を使ってよい.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 小高 問題 6.30(p.143), 問題 6.32(p.143), 問題 6.34(p.144), 問題 6.37(p.146).
章末問題 [6.5](p.149).

ベクトル場の線積分の計算手順書

Q1 マーク 1 それともマーク 2(法線)? 形で判定

マーク 2 のとき 弧長パラメタ表示で地道に計算 (L04)

マーク 1 のとき Q2 へ

Q2 保存的? 渦なし条件で判定 (L05)

保存的でないとき パラメタ表示で地道に計算 (L03)

保存的なとき Q3 へ

Q3 どれが好み? 楽な順. 2,3 は実質的に同じようなこと. 3,4 は大違い.

選択肢 1 f をやまかんで求めて $I = f(終) - f(始)$. (L06)

選択肢 2 f を公式で求めて $I = f(終) - f(始)$. (L06)

選択肢 3 楽な積分路に変形してからパラメタ表示で計算 (L05)

選択肢 4 それでもやっぱり元の積分路でパラメタ表示で地道に計算 (L03)

プチテスト計画

少なくとも問題のなかで次のことはやってもらう可能性が高いです.

問題の内容としては過去の問題と重なるけど, 設問方式は過去とは違うかもしれないのでびっくりしないでね. 過去と比べて小さな問題を多く出そうと思っています.

1. 言葉や図で説明された曲線のパラメタ表示を作る
2. 保存的じゃないベクトル場の線積分マーク 1 を計算する
3. 保存的なベクトル場の線積分マーク 1 を計算する
4. ベクトル場の線積分マーク 2 を計算する