# 応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1]　配布: 2007-06-11 Mon 更新: Time-stamp: "2007-06-25 Mon 07:49 JST hig"

## 6 復習と略解 – ベクトル場のポテンシャルを求めよう

1. $[\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{V}] = (2\mathrm{e}^{x+2y}) - (2\mathrm{e}^{x+2y}) = 0$. 渦なし条件を満たすので, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は保存的.

2. $C_1$ を始点 $\mathbf{0}$ 終点 $\boldsymbol{r}$ とする積分路として,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}) =& \int_{C_1} \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
=& \int_0^x (\mathrm{e}^{x'} + 2\mathrm{e}^{-x'})\,\mathrm{d}x' + \int_0^y (2\mathrm{e}^{x+2y'} + 4)\,\mathrm{d}y' \\
=&(\mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} + 2) + (\mathrm{e}^{x+2y} + 4y - \mathrm{e}^x) \\
=&\mathrm{e}^{x+2y} - 2\mathrm{e}^{-x} + 4y + 1.
\end{aligned}$$

やまかんでもまあまあ容易に思いつく (定数項の +1 はどうでもよいので思いつかなくてよい).

3. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(2,1) - f(1,2) = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^5 + 2\mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e}^{-2} - 4.$

## 7 quiz – ガウスの発散定理

1. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy^2, 2y)$ に対して発散 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよう.

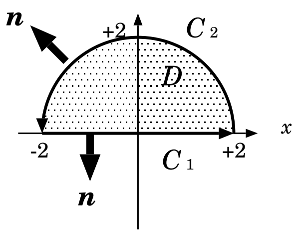
2. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0, 2y^2 - 3)$ とする. 図の半円板領域を $D$ としたとき, 面積分 $\displaystyle\int_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}S$ を計算しよう.

3. 暇と興味がある人のためだけの課題です. 線分 $C_1$, 半円弧 $C_2$ に対して, $I_i = \displaystyle\int_{C_i} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ を求めよう.

$\partial D = C_1 + C_2$ なので, ガウスの発散定理から

$$I_1 + I_2 = \left(\int_{\partial D} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \right)\int_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}S$$

となってるはずだけど, 本当に成り立ってる?




---

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

## チョークを節約するためのノート

**復習 重積分** 川薩四 p.144 $D$ が $x = a_1, x = a_2,\ y = \phi_1(x)$,$y = \phi_2(x)$ に囲まれた領域のとき，$f(x,y)$ の重積分は

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

**復習 2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開** 川薩四 p.118

$$f(a+h, b+s) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + s\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと} \tag{7.2}$$

### 黒板の計算の過程

$$I_1 = \int_{C_1} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{7.3}$$
$$= \int_{-h}^{+h} V_1(a+h, b+s)\,\mathrm{d}s \tag{7.4}$$
$$= \int_{-h}^{+h}\left(V_1(a,b) + h\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + s\tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}\right)\mathrm{d}s \tag{7.5}$$
$$= 2h\cdot V_1(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + 0 + \text{ちょっと}. \tag{7.6}$$

同様に

$$I_3 = \int_{+h}^{-h} -V_1(a-h, b+s)\,\mathrm{d}s = -2h\cdot V_1(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{7.7}$$
$$I_4 = \int_{-h}^{+h} +V_2(a+s, b-h)\,\mathrm{d}s = +2h\cdot V_2(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{7.8}$$
$$I_2 = \int_{+h}^{-h} -V_2(a+s, b+h)\,\mathrm{d}s = -2h\cdot V_2(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{7.9}$$

結局

$$I = I_1+I_2+I_3+I_4 = (2h)^2(\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)) = (\text{正方形の面積})\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}(a,b)) \tag{7.10}$$

## 今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 6.8(p.126), 問題 6.9(p.128), 問題 8.1(p.174), 問題 8.2(p.174), 章末問題 [6.3](p.148), 章末問題 [6.3](p.149).

### ベクトル場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用

pdf バージョンでは図は省略

## 任意参加:模範解答を作ろうプロジェクトのお知らせ

**ReLS** https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp > **応用ベクトル解析** > **任意参加プロジェクトフォーラム**の問題の模範解答作って投稿すると最大 20 点ゲット！

応用ベクトル解析の, 大学院入試の過去問や, ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して 1 問あたり最大 10 点, 1 人あたり最大 20 点の加算があります. プチテストが介護体験などで分母から除かれた人のリスク分散や, プチテストを寝飛ばしたり予想外の展開になったりした人の逆襲などの用途にもご利用ください.

ReLS https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp の応用ベクトル解析の任意参加プロジェクトフォーラムに投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンしたもの (後述) をフォーラムに返信してください.

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します. 複数人の貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 10 点がその人々に分配されます.

多くの人に参加のチャンスがあるように, 問題はときどき追加します. 追加のタイミングは, 原則として火曜日 13:00 ごろです. フォーラムの右側ブロックで, ‘このフォーラムをメール購読する’ を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます. ~~または http://hig3.d.hatena.ne.jp で予告します.~~

スキャンは, 自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室や樋口の研究室 1-502 でも行えます.

http://hig3.net

http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php

**お知らせ**　ごめんなさい 2007-06-18 月 2 は休講です. かわりに補講期間にやります.

目次 前回 次回 略解