応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-06-25 Mon 更新: Time-stamp: ”2009-07-04 Sat 17:45 JST hig”

7 復習と略解 – ベクトル場の発散を計算しよう＋ガウスの発散定理

2. は直交座標でも極座標でも計算できます.

2. では, 被積分関数がたまたま x の偶関数なので, $2\int_0^2 \mathrm{d}x$ でも計算できます. 偶関数じゃない普通の場合はこうはいかない.

2. で使った $\mathrm{d}S$ という記号は面積分を表すもので, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ と書かれることもあります. 変数 S があるわけではありません. 弧長パラメタによる積分 $\int \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s$ の $\mathrm{d}s$ とは無関係です (こちらは小文字).

1. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} = y^2 + 2.$

2. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = 4y$. よって,

$$\iint_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}\ \mathrm{d}S = \int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 4y\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left[2y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-2}^{2} 2(4-x^2)\ \mathrm{d}x = \tfrac{64}{3}.$$

8 quiz – ベクトル場の渦度を計算しよう＋グリーンの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy+y, 2xy)$ と, 平面の領域 D を考える. ただし, D は $(0,0), (1,0), (1,2)$ を 3 頂点とする三角形の内部.

1. 渦度 $[\nabla\boldsymbol{V}]$ を求めよう.
2. 面積分 $\int_D [\nabla\boldsymbol{V}]\mathrm{d}S$ を求めよう.
3. 暇と興味のある人は, 線積分 $\int_{\partial D} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を素直に求めよう. ただし, 積分路の向きは反時計回りとする.

チョークを節約するためのノート

復習 2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開 川薩四 p.118

$$f(a+h, b+s) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + s\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと} \tag{8.1}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

黒板の計算の過程

$$I_1 = \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t \tag{8.2}$$

$$= \int_{-h}^{+h} +V_2(a+h, b+t)\ \mathrm{d}t \tag{8.3}$$

$$= \int_{-h}^{+h} \left(V_2(a,b) + h\tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + t\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと} \right) \mathrm{d}s \tag{8.4}$$

$$= 2h \cdot V_2(a,b) + 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + 0 + \text{ちょっと}. \tag{8.5}$$

同様に

$$I_3 = \int_{+h}^{-h} -V_2(a-h, b+t)\ \mathrm{d}t = -2h \cdot V_2(a,b) + 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{8.6}$$

$$I_4 = \int_{-h}^{+h} +V_1(a+t, b-h)\ \mathrm{d}t = +2h \cdot V_1(a,b) - 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{8.7}$$

$$I_2 = \int_{+h}^{-h} -V_2(a+t, b+h)\ \mathrm{d}t = -2h \cdot V_1(a,b) - 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}. \tag{8.8}$$

結局

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (2h)^2 (\tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)) = (\text{正方形の面積}) \times [\boldsymbol{\nabla V}]. \tag{8.9}$$

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

渦度とグリーンの定理 小高 問題 6.16(p.135), 問題 8.6(p.178), 問題 8.7(p.178), 章末問題 [6.5](p.149).

ベクトル場の渦度 $[\boldsymbol{\nabla V}]$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用

pdf バージョンでは図は省略

任意参加:模範解答を作ろうプロジェクトのお知らせ

応用ベクトル解析の, 大学院入試の過去問や, ファイナルトライアルの準備に役立つ典型的な問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです. その貢献に対して1問あたり最大10点, 1人あたり最大20点の加算があります.

プチテストが介護体験などで分母から除かれた人のリスク分散や, プチテストを寝飛ばしたり予想外の展開になったりした人の逆襲などの用途にもご利用ください.

ReLS `https://f5lms.media.ryukoku.ac.jp` の応用ベクトル解析の任意参加プロジェクトフォーラムに投稿されている問題に対して, (部分的でもいいから) 模範解答を紙に作成して, スキャンまたは撮影したもの (後述) をフォーラムに返信してください.

最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価して点数を決定します. また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します. 複数人の貢献で1問の最終的な答案が完成したら, 10点がその人々に分配されます.

多くの人に参加のチャンスがあるように, 問題はときどき追加します. 追加のタイミングは, 原則として火曜日13:00ごろです. フォーラムの右側ブロックで, 'このフォーラムをメール購読する' を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知を受けることができます. ~~または `http://hig3.d.hatena.ne.jp` で予告します.~~

スキャンは, 自宅にスキャナがあればそれを使ってくれてもいいし, 3号館地下第2セルフラーニング室や樋口の研究室1-502でも行えます. 携帯のカメラで撮って `@mail.ryukoku` のアドレスに添付で送って使うというのも手軽です. やりかたの詳しい説明は `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`.

お知らせ 2007年6月27日(水) 16:50 3年生向け 数理情報演習履修説明会 (3-107)