応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-07-02 Mon 更新: Time-stamp: "2007-06-25 Mon 21:26 JST hig"

8 復習と略解 – 渦度とグリーンの定理

1. 渦度 $[\nabla \boldsymbol{V}] = 2y - x - 1$.

2. $$\int_D [\boldsymbol{\nabla V}]\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (2y - x - 1)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x (2x^2 - 2x) = -\tfrac{1}{3}. \quad (8.1)$$

3. 3 個の線分に分けて計算する. $(0,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ線分を C_1, $(0,1)$ と $(1,2)$ を結ぶ線分を C_2, $(1,2)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分を C_3, とすると,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0, \quad \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4, \quad \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\tfrac{13}{3}. \quad (8.2)$$

よって, $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\tfrac{1}{3}$ であり, グリーンの定理が確かめられる.

9 quiz – 曲面の接平面を描こう

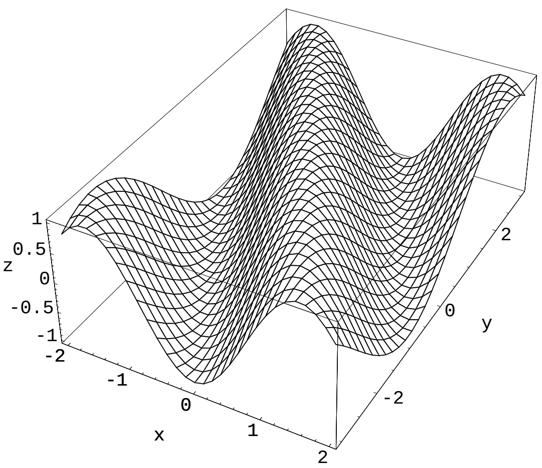
パラメタ表示された曲面 $\boldsymbol{r}(s,t) = (t \sin s, t \cos s, t^4)$ を考えよう $(0 \le s < 2\pi, 0 \le t < +\infty)$.

1. s, t を消去して x, y, z で書かれた方程式を求めよう.
2. 曲面上の点 $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi, 2) = (-\sqrt{3}, 1, 16)$ における単位法ベクトルを求めよう.
3. 曲面上の点 $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi, 2) = (-\sqrt{3}, 1, 16)$ における接平面をパラメタ表示しよう.
4. 曲面上の点 $\boldsymbol{r}(\frac{1}{3}\pi, 2) = (-\sqrt{3}, 1, 16)$ における接平面の方程式を求めよう.

曲面のパラメータ表示

$\boldsymbol{r}(s,t) = (s, t, \cos(t + 2s))$.

[1]Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.



今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題 2.45(p.62), 問題 2.46(p.63), 問題 2.47(p.64), 問題 2.48(p.64), 章末問題 [2.9](p.65).