応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-07-16 Mon 更新: Time-stamp: "2007-07-16 Mon 09:16 JST hig"

10 復習と略解 – 曲面上の面積分を計算しよう

講評とコメント 基底をなす基本ベクトルは $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ なので, 接ベクトルの外積 (それもベクトル) の絶対値は

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right| = |-t\boldsymbol{i}+t\cos s\boldsymbol{j}+t\sin s\boldsymbol{k}| = |(-t,t\cos s,t\sin s)|$$

と計算されるけど, これが,

$$\boxed{\text{大間違い}} = |-t+t\cos s+t\sin s| \quad \text{いつのまにかベクトルがスカラーに!}$$

とか

$$\boxed{\text{大間違い}} = |-t,t\cos s,t\sin s| \quad \text{縦棒の間にコンマ区切りで 3 個の数ってどういう意味?}$$

とかなってしまう人がいました. ご注意.

曲面上の点 $\boldsymbol{r}(s,t)$ における単位法ベクトルは

$$\pm\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right|} \tag{10.1}$$

の表裏 2 個があるので, 問題文から, 条件にあったほうを選ぶ. 今回は x 成分が負という条件で, たまたま $+$ を選ぶと条件は満たされる.

略解

1. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)=(0,-t\sin s,t\cos s)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)=(1,\cos s,\sin s)$ より,

   $$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right| = |(-t,t\cos s,t\sin s)| = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}\cdot t$$

   面積は

   $$\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3 \sqrt{2}t\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s = 8\sqrt{2}\pi.$$

2. 法ベクトル (の正の定数倍) 候補である $\pm(-t,t\cos s,t\sin s)$ のうち, $1\le t\le 3$ x 成分が負になるのは $+$ をとったときだから, $+$ を選ぶ $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))=(0,3t\cos s,0)$ より,

$$\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3 3t^2\cos^2 s\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s = 26\pi$$

[1]Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3.

11 quiz − 3次元のガウスの発散定理

パラメタ表示 $\boldsymbol{r}(r,\theta,u)=(r\cos\theta, r\sin\theta, u)$ $(0\le r\le 3, 0\le\theta<2\pi, -1\le u\le 2)$ で表される立体 D と, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(0,0,z^2)$ を考える.

1. 面積分 $I=\displaystyle\int_{\partial D}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ を, 3次元のガウスの発散定理を使って体積分に書きかえて, 計算しよう. ヤコビアンが必要であることに注意.
2. 暇と興味のある人は, D の形を妄想してみよう.
3. 暇と興味のある人は, 積分 I をそのまま (ガウスの発散定理を使わずに) 面積分として計算してみよう. ただしく妄想できてれば意外に簡単.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

3次元のガウスの発散定理

問題 8.3(p.181)

立体のパラメター表示と体積分

問題 5.1–6(p.109–114), 章末問題 [5.1]–[5.5](p.114–115).

球座標

問題 2.18(p.49), 問題 2.19(p.49).

任意参加:模範解答を作ろうプロジェクトのお知らせ

まだまだ募集中です. みんな参加してね.

補講後 (ファイナルトライアルの前の週) に, プロジェクトの問題 としてファイナルトライアル予想問題を追加する予定.

締切はファイナルトライアル前日の 2007-07-22 Sun 17:00 JST です.

ファイナルトライアルに向けた勉強が忙しくてプロジェクトはやってられない, ことはありません! プロジェクトの模範解答作るのが最強のファイナルトライアル準備です. ちなみに, プロジェクトの問題は過去のファイナルトライアルの追試の問題からとったりしてます.

ファイナルトライアル出題計画

次の 5 問を出題します．すべて 3 次元です．なお, 水曜日には気が変わっているかも．再確認してね．

1. スカラー場, ベクトル場の勾配, 発散, 回転を求める問題．
2. 曲面の単位法ベクトルと接平面 (方程式およびパラメター表示) を求める問題．
3. 曲面 S 上で面積分 $\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$ または面積 $\int_S 1 \, \mathrm{d}S$ を計算する問題．
4. ガウスの定理を使って閉曲面上の面積分を体積分に直したり (あるいはその逆), ストークスの定理を使って閉曲線上の線積分を面積分に直したり (あるいはその逆) して, 場合によっては数値を計算する問題．(問題の一部がプチテストの出題範囲と重なります．今回は 3 次元です)．
5. 保存的または保存的でないベクトル場の線積分を計算する問題．(プチテストの出題範囲と重なります．今回は 3 次元です)．

講義の録画　下の Web ページから 2005,2006 年の講義の再放送が見られます．

UserID:

Password: