

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [略解](#)

## 応用ベクトル解析

樋口さぶろお<sup>1</sup> 配布: 2007-07-18 Wed 更新: Time-stamp: "2007-07-18 Wed 18:28 JST hig"

### 11 復習と略解 – パラメタ表示された領域の体積分を計算しよう + 3次元のガウスの発散定理

講評とコメント  $\nabla \cdot V$  を計算するところで、 $V$  でなく 立体のパラメタ表示  $r(r, \theta, u)$  を使ってしまった人が何人かいました。  $r(r, \theta, u)$  は立体を表し  $V$  はベクトル場を表すので、ベクトル場の発散と  $r(r, \theta, u)$  は関係ありません。

また、2次元のときの証明を真剣に振り返るとわかるのですが、ベクトル場の発散を計算するには、 $x, y, z$  成分を  $x, y, z$  で偏微分する方法しかありません。

$$\boxed{\text{大間違い}} \quad \nabla \cdot V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_u}{\partial u} \quad (11.1)$$

みたいなはありません。

#### 略解

1. 3次元のガウスの発散定理により体積分に書き直す。  $\nabla \cdot V = 2z$ . ヤコビアンは平面極座標と同じで  $r$ .

$$I = \int_0^3 \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-1}^2 r \cdot 2u \, du \right\} d\theta \right\} dr = \frac{9}{2} \cdot 2\pi \cdot (2^2 - (-1)^2) = 27\pi.$$

2. 回転軸が  $z$  軸である、半径3、長さ3の円柱。
3. 側面上では  $V \cdot n = 0$  となり、面積分に寄与はない。2つの底面からの寄与を合計して、

$$I = \int_0^3 \left\{ \int_0^{2\pi} r \cdot 2^2 \, d\theta \right\} dr + \int_0^3 \left\{ \int_0^{2\pi} r \cdot (-(-1)^2) \, d\theta \right\} dr = 27\pi.$$

### 12 quiz – ベクトル場の回転を求めよう + ストークスの定理

曲面  $S$  のパラメタ表示を  $r(s, t) = (t \sin s, 2, t \cos s)$  ( $0 \leq s < 2\pi, 1 \leq t \leq 3$ ) とする。曲面  $S$  の単位法ベクトルで  $y$  成分が正であるものを  $n$  とする。ベクトル場  $V(r) = (z, y^2, -x)$  を考える。

1. ベクトル場の回転  $\nabla \times V$  を計算しよう。

<sup>1</sup>Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

2. 曲面の境界である曲線 (2 個ある) のパラメタ表示を求めよう. できればこの時点で曲面と曲線の形や積分路の向きを妄想しよう.
3. 面積分  $I = \int_S (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} \, dS$  を, ストークスの定理を使って線積分 (マーク 1) に書き直して積分しよう (つまり, 上でせっかく求めたベクトル場の回転は使うなってことです)

## 今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

3次元の回転 小高 問題 7.11(p.157), 章末問題 [7.1]–[7.7](p.166)

ストークスの定理 小高 問題 8.14(p.183), 問題 8.16(p.184), 章末問題 [8.9](p.187).

## 任意参加:模範解答を作ろうプロジェクトのお知らせ

まだまだ募集中です. みんな参加してね.

プロジェクトの問題としてファイナルトリアルシミュレーション問題を追加しています.

プロジェクトすべての締切はファイナルトリアル前日の 2007-07-22 Sun 17:00 JST です.

ファイナルトリアルに向けた勉強が忙しくてプロジェクトはやってられない, ことはありません! プロジェクトの模範解答作るのが最強のファイナルトリアル準備です. ちなみに, プロジェクトの問題は過去のファイナルトリアルの追試の問題からとったりしています.

黒板の写真 下の Web ページから 2007 年の黒板の写真が見られます. 書き間違えたところをこっそり訂正しています.

講義の録画 下の Web ページから 2005,2006 年の講義の再放送が見られます.

UserID:

Password:



<http://hig3.net>

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [略解](#)