応用ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2007-07-18 Wed 更新: Time-stamp: "2007-07-18 Wed 18:27 JST hig"

12 復習と略解 – ベクトル場の回転を求めよう＋ストークスの定理

1. $\nabla \times \boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{j} = (0, 2, 0)$.

2. S は, 平面 $y = 2$ 上で, $(0, 2, 0)$ を中心とする, 内径 1, 外径 3 の 5 円玉型であり, 境界は $\boldsymbol{r}(s, t)$ で $t = 1, 3$ とおいたものであることがわかる. すなわち, $C_1 : \boldsymbol{r}_1(s) = \boldsymbol{r}(s, 1) = (\sin s, 2, \cos s)$ と $C_3 : \boldsymbol{r}_3(s) = \boldsymbol{r}(s, 3) = (3\sin s, 2, 3\cos s)$. $(0 \leq s < 2\pi)$.

   $\boldsymbol{n}$ から決まる右ねじの向きでは, C_1 は始点 $\boldsymbol{r}_1(2\pi)$, は終点 $\boldsymbol{r}_1(0)$, C_3 は始点 $\boldsymbol{r}_3(0)$, は終点 $\boldsymbol{r}_3(2\pi)$.

3. ストークスの定理により,

$$
\begin{aligned}
I =& \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
=& \int_{2\pi}^{0} (\cos s, 2^2, -\sin s) \cdot (\cos s, 0, -\sin s)\ \mathrm{d}s + \int_{0}^{2\pi} (3\cos s, 2^2, -3\sin s) \cdot (3\cos s, 0, -3\sin s)\ \mathrm{d}s \\
=& 16\pi.
\end{aligned}
$$

http://hig3.net

目次 前回 次回 略解

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.