ベクトル解析∇プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-06-04 Thu 更新: Time-stamp: "2009-06-15 Mon 13:02 JST hig"

プチテスト参加案内

両面です．全部で4問です．60分です．

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. $\boldsymbol{r} = (x, y), \boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$.

1

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (3 + 15x^4y^4, 12x^5y^3 + 4)$ を考える.

1. このベクトル場は保存的かどうか答えよう. もし保存的であるなら, このベクトル場のスカラーポテンシャル $f(\boldsymbol{r})$ を求めよう.
2. 曲線 C のパラメタ表示を $\boldsymbol{r}(t) = (0, 1) + (3\cos t, 2\sin t)$ $(0 \le t \le \pi)$ とする. ただし, 始点が $\boldsymbol{r}(0) = (3, 1)$ 終点が $\boldsymbol{r}(\pi) = (-3, 1)$ である. 曲線 C に沿った $\boldsymbol{V}$ の線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう.

2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (1, 5xy - y^2)$ を考える.

1. このベクトル場は保存的かどうか答えよう. もし保存的であるなら, スカラーポテンシャル $f(\boldsymbol{r})$ を求めよう.
2. パラメタ表示された曲線 C, $\boldsymbol{r}(t) = (-t^3, 3t)$, $(0 \le t \le 1)$ を考える. ただし始点 $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0)$, 終点 $\boldsymbol{r}(1) = (-1, 3)$ とする. 曲線 C に沿った, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう.

続く

[1]Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

以下の問に答えよう.

1. パラメタ表示された曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (2\sqrt{3}\sin t, -4t)$ について, 点 $\boldsymbol{r}_0 = (3, -\frac{4}{3}\pi)$ における接線と法線のパラメタ表示を求めよう.
2. パラメタ表示された曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (-t^2 + 4t, 2t^2 - 8t + 3)$ $(-1 \leq t \leq 2)$ を考える. この曲線の長さを求めよう.
3. スカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = (x + 2y)^2$ の勾配を求めよう.
4. 点 $\boldsymbol{r}_0 = (2, -1)$ を中心, $(2, 3)$ を始点, $(-2, -1)$ を終点とする, 半径 4, 中心角 $\pi/2$ の円弧のパラメタ表示を作ろう.

4

風速が $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2y, x - 3)$ で与えられる地域を, 一羽のキングペンギンが正面前向きに直立歩行で歩いている. 時刻 t のキングペンギンの位置は $\boldsymbol{r}(t) = (3t, t^2)$ で与えられる.

1. (キングペンギンとは無関係に) 風が吹いていない地点の座標を求めよう.
2. キングペンギンがちょうど真横からの風を羽に感じる時刻を求めよう. このとき, キングペンギンは左右どちらの羽に風を感じるか答えよう.

5

これは問題でなくアンケートです. この問題を一通り解き終わるのに何分かかりましたか. 解き終わらなかった人は, 何分あれば一通り解き終わりそうですか.

ベクトル解析∇プチテスト略解

樋口さぶろお[2] **配布**: 2009-06-04 Thu **更新**: Time-stamp: "2009-06-15 Mon 13:02 JST hig"

1

1. $(\nabla \times \boldsymbol{V})_z = 60x^4y^3 - 60x^4y^3 = 0$. **よって保存的**. **実際**, $f(\boldsymbol{r}) = 3x + 3x^5y^4 + 4y$ **とおくと** $\nabla f = \boldsymbol{V}$ **となることが確かめられる**. **次の積分によっても求められる**.

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_0^x (3 + 15t^4 \cdot 0^4)\ \mathrm{d}t + \int_0^y (12x^5t^3 + 4)\ \mathrm{d}t = 3x + (3x^5y^4 + 4y).$$

2. **保存的なので**

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(-3,1) - f(3,1) = -1476.$$

2

1. $(\nabla \times \boldsymbol{V})_z = 5y - 0 \neq 0$ **より保存的でない**.
2. **パラメタ表示を用いて**, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-3t^2, 3)$ **より**

$$\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (1, 5(-t^3)3t - 9t^2) \cdot (-3t^2, 3)\ \mathrm{d}t = -19.$$

3

1. **接線** $\boldsymbol{r}(t) = (3, -\frac{4}{3}\pi) + (\sqrt{3}, -4)(t - \frac{\pi}{3})$, **法線** $\boldsymbol{r}(t) = (3, -\frac{4}{3}\pi) + (4, \sqrt{3})t$.
2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-2t + 4, 4t - 8)$. **長さは**

$$\int_{-1}^2 \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right|\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^2 \sqrt{20(t-2)^2}\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^2 \sqrt{20}|t-2|\ \mathrm{d}t = 9\sqrt{5}.$$

実はこの曲線は線分であり, **三平方の定理からも求めることができる**.

3. $\nabla f = (2(x + 2y), 4(x + 2y))$.
4. $\boldsymbol{r}(t) = (2, -1) + 4(\cos t, \sin t)$. $(\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi)$.

[2]Copyright ©2005-2007 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

4

1. $\boldsymbol{V}(x,y)=(0,0)$ **を** (x,y) **について解いて**, $\boldsymbol{r}=(3,0)$.

2. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=6t^2+2t(3t-3)=0$ **を解いて**, $t=0,\frac{1}{2}$. **この時刻の** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)),\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ **の図を描くと**, $t=0,\frac{1}{2}$ **とも左真横からの風を羽に感じることがわかる**.

http://hig3.net