

目次 前回 次回 略解

ベクトル解析

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-05-18 Mon 更新: Time-stamp: "2009-05-18 Mon 14:24 JST hig"

4 略解 — 曲線の長さを計算しよう!

1. (a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{V}(-4t, 2t) = (-2t + 1, (-4t) + (2t)) = (-2t + 1, -2t)$.
 (b) 速度ベクトル $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (-4, 2)$ と風 $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = (-2t + 1, -2t)$ が平行で向きが逆になる時刻を求めればよい. 平行という条件は $(-4)(-2t) = 2(-2t + 1)$ より $t = \frac{1}{6}$. このとき, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(\frac{1}{6}) = (-4, 2)$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(\frac{1}{6})) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ で向きが逆になっている.
 (c) 速度ベクトルと風が直交すればいいので, 条件は内積 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = 0$. これを解いて $t = 1$. このときベクトル $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(1)$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(1))$ の図を描くと, くちばしの右側にあたるのがわかる.

(d) 次回にやります.

2. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = 3e^{-2t}(-2 \cos t - \sin t, -2 \sin t + \cos t)$. $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)| = 3e^{-2t}\sqrt{5}$. よって

$$\int_{C_3} ds = \int_0^\infty 3e^{-2t}\sqrt{5}dt = \left[-\frac{3\sqrt{5}}{2} \right]_0^\infty = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

3.

$$\int_{C_3} f ds = \int_0^\infty e^{-5t} 3e^{-2t}\sqrt{5}dt = \left[-\frac{3\sqrt{5}}{7} \right]_0^\infty = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

4. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = (2t, 6t)$. $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)| = ((2t)^2 + (6t)^2)^{1/2} = 2\sqrt{10} \cdot |t|$. よって

$$\int_{C_3} ds = \int_0^2 2\sqrt{10} \cdot t dt = 4\sqrt{10}.$$

5.

$$\int_{C_3} f ds = \int_0^2 (3t - 2) \cdot 2\sqrt{10} \cdot t dt = 8\sqrt{10}.$$

6. 再出題します.

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

5 ベクトル場の線積分マーク1を計算しよう!

今日の目標

- 吹雪の中を歩くアデリーペンギンの大変さを求められるようになるう!(曲線に沿ったベクトル場の線積分=線積分マーク1)

quiz

1. ベクトル場 $V(x, y) = (3y^2, 2x)$ と曲線 $C_4 : r_4(t) = (-t^3, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) を考える.
 - (a) $V(r(t))$ を求めよう.
 - (b) 曲線 C_4 に沿ったベクトル場 V の線積分(マーク1) $\int_{C_4} V \cdot dr$ を求めよう. ただし, $(0, 0)$ を始点, $(-8, 2)$ を終点とする.
2. ベクトル場 $V(x, y) = (-x + 2y, 3x + 4y)$ と曲線 $C_5 : r_5(t) = (2t, -3t^2)$ ($-2 \leq t \leq 0$) を考える. 曲線 C_5 に沿ったベクトル場 V の線積分(マーク1) $\int_{C_5} V \cdot dr$ を求めよう. ただし, $(-4, -12)$ を始点, $(0, 0)$ を終点とする.

プチテストやります!

6月8日(月)を予定. 科目の成績100点中30点分. 5月25日または6月1日の講義でより詳細な内容を予告します.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 問題3.11, 問題3.12(p.76), 章末問題[3.4], [3.5], [3.6](1)(p.81), [3.7], [3.8](p.82).



<http://hig3.net>