ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-06-08 Mon 更新: Time-stamp: "2009-06-09 Tue 12:04 JST hig"

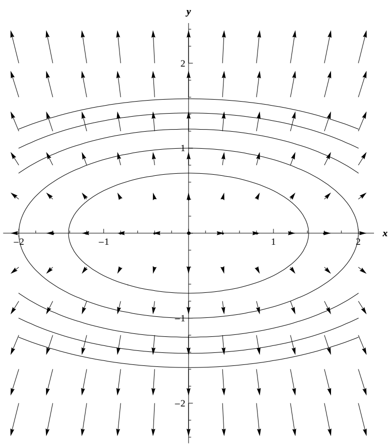
6 略解 — スカラー場の勾配を求めよう!

1. $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (y^4, 4xy^3)$.

2. 保存場で, $\boldsymbol{V} = \nabla f$, $f(\boldsymbol{r}) = xy^4$ と書けるので, $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(1,2) - f(3,1) = 1 \cdot 2^4 - 3 \cdot 1^4 = 13$.

3. $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -1 - 1 = -2 \neq 0$. 渦なし条件は成立しない. よって保存場ではない.

4. 等高線は $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + 4y^2 = C^2$ すなわち $\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{(C/2)^2} = 1$. よって原点を中心とする長半径 C, 短半径 $C/2$ の楕円群. ベクトル場は結果として楕円に直交しているはず.



5. そのうち再出題するかも.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

7　ベクトル場のスカラーポテンシャルを求めよう!

今日の目標

- **ベクトル場 V が保存的であることがわかったとき, 楽な積分路に変更して線積分を計算できるようになろう!**
- **ベクトル場 V が保存的であることがわかったとき, やまかんまたは計算で, $\boldsymbol{V} = \nabla f$ となるスカラー場 f(スカラーポテンシャル) を求められるようになろう!**
- **3 次元のベクトル場の線積分と 3 次元の勾配も大した違いはないことを知ろう!**

7.1　quiz:保存的なベクトル場の線積分

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (\mathrm{e}^{x+2y} + \mathrm{e}^{-x}, 2\mathrm{e}^{x+2y} + 4)$ **を考える**.

1. **このベクトル場が保存的であることを, 渦なし条件を確かめることによって示そう**.
2. **このベクトル場と** $\nabla f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ **という関係にあるスカラー場** f **を, 線積分を使って求めよう. やまかんや数理モデルの完全微分形のやり方で答がわかってしまう人も, 若いときには苦労するために線積分でやろう**.
3. **このベクトル場** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ **について, 線積分 (マーク 1)** $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ **を求めよう. ただし** C **は始点** $(1, 2)$ **終点** $(2, 1)$ **の原点を中心とする円弧. 上の** f **の結果を使ってよい**.

7.2　quiz:線積分 (3 次元)

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x+z^3, 6y, 3xz^2)$ **とパラメタ表示された曲線** $C : \boldsymbol{r}(t) = (t^2, 2t, -t)$ $(-2 \leq t \leq 0)$ **を考える. ただし始点** $\boldsymbol{r}(-2)$, **終点** $\boldsymbol{r}(0)$ **とする. 線積分** $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ **を求めよう**.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 **問題** 6.30(p.143), **問題** 6.32(p.143), **問題** 6.34(p.144), **問題** 6.37(p.146).
章末問題 [6.5](p.149).

ベクトル場の線積分の計算手順書

Q1 マーク 0(長さなど) それともマーク 1 それともマーク 2(法線)? 形で判定

マーク 0 のとき $I = \int_C f \, \mathrm{d}s$ パラメタ表示で地道に計算 (L04)

マーク 2 のとき $I = \int_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s$ 授業ではまだやってないけど, パラメタ表示で地道に計算 (L08?)

マーク 1 のとき $I = \int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ Q2 へ

Q2 保存的? 渦なし条件で判定 (L06)

保存的でないとき パラメタ表示で地道に計算 (L05)

保存的なとき Q3 へ

Q3 どれが好み? 楽な順. 2,3 は実質的に同じようなこと. 3,4 は大違い.

選択肢 1 f をやまかんで求めて $I = f(\text{終}) - f(\text{始})$. (L06)

選択肢 2 f を公式で求めて $I = f(\text{終}) - f(\text{始})$. (L07)

選択肢 3 楽な積分路に変形してからパラメタ表示で計算 (L07)

選択肢 4 それでもやっぱり元の積分路でパラメタ表示で地道に計算 (L05)

プチテストやります!

全学休講でスライドして, 6 月 15 日 (月). 科目の成績 100 点中 30 点分. ~~60 分~~/80 分. 持ち込みなし. 出題計画 (来週の授業までに最終的に決めます) は

- 曲線の接線と法線の方程式を求めよう (L03)
- 関数の曲線に沿った線積分 (マーク 0) を計算しよう (曲線の長さも含む)(L04)
- ベクトル場の曲線に沿った線積分 (マーク 1) を計算しよう (保存的かもしれないし (L06) 保存的でないかも (L05))
- 風とアデリーペンギンについての問題 (L02)
- 勾配ベクトル場を求めよう (L06)
- ベクトル場のスカラーポテンシャルを求めよう (L07)

もしかすると, 出題シミュレーション問題を, e ラーニングシステム `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` 上で模範解答を作ろうプロジェクトとして公開するかもしれませんが, それまでは, あるいはそれがなかったら, これまでの quiz, 今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題, 2007 年度以前の出題例 (Web にあります. 範囲や用語は適宜翻訳してください) を勉強しておくことをおすすめします.

目次 前回 次回 略解