ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-06-22 Mon 更新: Time-stamp: "2009-06-22 Mon 13:22 JST hig"

7 略解

7.1 略解:保存的なベクトル場の線積分

1. $(\nabla \times \boldsymbol{V})_z = (2\mathrm{e}^{x+2y}) - (2\mathrm{e}^{x+2y}) = 0$. 渦なし条件を満たすので, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は保存的.

2. C_1 を始点 $\mathbf{0}$ 終点 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ とする積分路として,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}_1) =& \int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
=& \int_0^{x_1} (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})\, \mathrm{d}t + \int_0^{y_1} (2\mathrm{e}^{x_1+2t} + 4)\, \mathrm{d}t \\
=& (\mathrm{e}^{x_1} - 1 - \mathrm{e}^{-x_1} + 1) + (\mathrm{e}^{x_1+2y_1} + 4y_1 - \mathrm{e}^{x_1}) \\
=& \mathrm{e}^{x_1+2y_1} - \mathrm{e}^{-x_1} + 4y_1.
\end{aligned}
$$

   やまかんでもまあまあ容易に思いつく.

3. $\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(2,1) - f(1,2) = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} - 4.$

7.2 略解:線積分 (3 次元)

$\nabla \times \boldsymbol{V} = (0, 3z^2 - 3z^2, 0) = (0,0,0)$. よって保存的. 超ラッキー!.

山勘により $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + 3y^2 + xz^3$ とおくと, $\nabla f = \boldsymbol{V}$ が成立している (このことからも保存的であることがわかる). よって,

$$
\int_C \boldsymbol{V} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{r}(0)) - f(\boldsymbol{r}(-2)) = 0 - 96 = -96.
$$

別の計算方法として, 素直に線積分マーク 1 の手順を踏んで,

$$
\int_{-2}^{0} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t
$$

を計算してもそれほど大変でなく同じ結論を得る.

[1]Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

8　ベクトル場の渦度を計算しよう! ＋ グリーンの定理

今日の目標

- 面積分 (重積分) を思い出そう!
- 渦無し条件の真実を知ろう!
- グリーンの定理を納得して使えるようになろう!

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{V} \cdot\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{D} (\nabla \times \boldsymbol{V})_z \,\mathrm{d}S$$

8.1　quiz:例題:グリーンの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (y^2, x)$ を考える. 曲線 C を, 原点を中心とする半径 2 の円周とする (左回り. どこを始点終点と思ってもいいけど例えば $(2, 0)$ が始点で終点). 線積分 (マーク 1) $\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ をグリーンの定理を使って面積分に直して計算しよう.

8.2　quiz:グリーンの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (xy{+}y, 2xy)$ と, 平面の領域 D を考える. ただし, D は $(0, 0), (1, 0), (1, 2)$ を 3 頂点とする三角形の内部.

1. 渦度 $(\nabla \times \boldsymbol{V})_z$ を求めよう.
2. 面積分 $\int_D (\nabla \times \boldsymbol{V})_z \mathrm{d}S$ を求めよう.
3. 線積分 $\int_{\partial D} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を素直に求めよう.

チョークを節約するためのノート

復習 重積分 川薩四 p.144 D **が** $x=a_1, x=a_2$, $y=\phi_1(x)$,$y=\phi_2(x)$ **に囲まれた領域のとき**, $f(x,y)$ **の重積分は**

$$\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}S = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x \tag{8.1}$$

復習 2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開 川薩四 p.118

$$f(a+h,b+t) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと} \tag{8.2}$$

黒板の計算の過程　$\boldsymbol{r}(t)=(a+h,b+t)$ **なので**,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{C_1} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\ \mathrm{d}t && (8.3)\\
&= \int_{C_1} (V_1(a+h,b+t), V_2(a+h,b+t)) \cdot (0,1)\ \mathrm{d}t && (8.4)\\
&= \int_{-h}^{+h} +V_2(a+h,b+t)\ \mathrm{d}t && (8.5)\\
&= \int_{-h}^{+h} \left(V_2(a,b) + h\tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + t\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと} \right) \mathrm{d}t && (8.6)\\
&= 2h \cdot V_2(a,b) + 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + 0 + \textbf{ちょっと}. && (8.7)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{+h}^{-h} -V_2(a-h,b+t)\ \mathrm{d}t = -2h \cdot V_2(a,b) + 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + \textbf{ちょっと}. && (8.8)\\
I_4 &= \int_{-h}^{+h} +V_1(a+t,b-h)\ \mathrm{d}t = +2h \cdot V_1(a,b) - 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと}. && (8.9)\\
I_2 &= \int_{+h}^{-h} -V_2(a+t,b+h)\ \mathrm{d}t = -2h \cdot V_1(a,b) - 2h^2 \cdot \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと}. && (8.10)
\end{aligned}$$

結局

$$\begin{aligned}
I =& I_1 + I_2 + I_3 + I_4\\
=& (2h)^2 (\tfrac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)) + \text{ちょっと} \simeq \textbf{(正方形の面積)} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z. && (8.11)
\end{aligned}$$

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

渦度とグリーンの定理　**教科書では** $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z$ **のことを** $[\nabla \boldsymbol{V}]$ **と書いています**.

小高 **問題** 6.16(p.135), **問題** 8.6(p.178), **問題** 8.7(p.178), **章末問題** [6.5](p.149).

ベクトル場の渦度 $(\nabla \times \boldsymbol{V})_z$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用

pdf バージョンでは図は省略

http://hig3.net