ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] **配布**: 2009-06-29 Mon **更新**: Time-stamp: "2009-06-29 Mon 21:27 JST hig"

8 略解

8.1 略解:例題:グリーンの定理

授業で説明済み

8.2 略解:グリーンの定理

1. **渦度** $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z = 2y - x - 1$.

2. $$\int_D (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V})_z \, \mathrm{d}S = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (2y - x - 1) \, \mathrm{d}y \right) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 - 2x) \, \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}.$$

   または $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 (2y - x - 1) \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}y = -\tfrac{1}{3}$.

3. **曲線** ∂D **を** 3 **個の線分に分けて計算する**. $(0,0)$ **と** $(1,0)$ **を結ぶ線分を** $C_1 : \boldsymbol{r}(t) = (1,0)t \ (0 \le t \le 1)$, $(1,0)$ **と** $(1,2)$ **を結ぶ線分を** $C_2 : \boldsymbol{r}(t) = (1,t) \ (0 \le t \le 2)$, $(1,2)$ **と** $(0,0)$ **を結ぶ線分を** $C_3 : \boldsymbol{r}(t) = -(1,2)t \ (-1 \le t \le 0)$ **とすると**,

   $$\int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0, \quad \int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4, \quad \int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\tfrac{13}{3}.$$

   よって, $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\tfrac{1}{3}$ **であり**, **グリーンの定理が確かめられる**.

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

9　グリーンの定理の応用+ベクトル場の線積分マーク2を計算しよう!

今日の目標

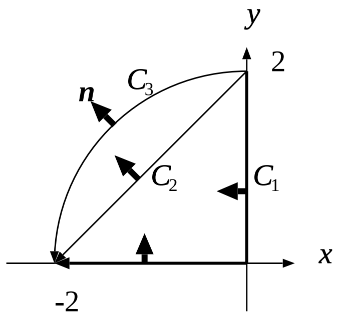
- 渦無し条件の真実を知ろう!
- ベクトル場の線積分 (マーク 2) で水漏れの量を求めよう!

9.1　quiz:線積分 (マーク 2)

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x, x+3y)$ を考える. 図の

1. 折れ線 C_1
2. 直線 C_2
3. 円弧 C_3

(いずれも始点 $(0,2)$, 終点 $(-2,0)$) について, 線積分 (マーク 2) $\displaystyle\int_{C_i} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ を求めよう. ただし n は曲線の進行方向右向きの単位法線ベクトルとする.



9.2　quiz:線積分 (マーク 1)

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (2x, x+3y)$ を考える. 図の

1. 折れ線 C_1
2. 直線 C_2
3. 円弧 C_3

(いずれも始点 $(0,2)$, 終点 $(-2,0)$) について, 線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_{C_i} \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう. 渦度 $(\nabla\times\boldsymbol{V})_z$ を求め, グリーンの定理を利用して楽できないか考えよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 **問題**6.8(p.126), **問題**6.9(p.128), **問題**8.1(p.174), **問題**8.2(p.174), **章末問題** [6.3](p.148), **章末問題** [6.3](p.149).

ベクトル場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$

小林-高橋, **ベクトル解析入門**, **東京大学出版会** (2003) p.130, **図** 6.8 **より引用**

pdf **バージョンでは図は省略**

チョークを節約するためのノート

復習 重積分 川薩四 p.144 D **が** $x=a_1, x=a_2$, $y=\phi_1(x)$,$y=\phi_2(x)$ **に囲まれた領域のとき**, $f(x,y)$ **の重積分は**

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}S=\int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

復習 2 変数関数 $f(x,y)$ **の** $(x,y)=(a,b)$ **における 1 次のテイラー展開** 川薩四 p.118

$$f(a+h,b+t)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\textbf{ちょっと} \tag{9.2}$$

黒板の計算の過程

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{C_1}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s\\&=\int_{-h}^{+h}V_1(a+h,b+t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-h}^{+h}\left(V_1(a,b)+h\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+t\tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)+\textbf{ちょっと}\right)\mathrm{d}t\\&=2h\cdot V_1(a,b)+2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+0+\textbf{ちょっと}.\end{aligned} \tag{9.3}$$

同様に

$$I_3=\int_{+h}^{-h}-V_1(a-h,b+t)\,\mathrm{d}t=-2h\cdot V_1(a,b)+2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+\textbf{ちょっと}. \tag{9.4}$$

$$I_4=\int_{-h}^{+h}+V_2(a+t,b-h)\,\mathrm{d}t=+2h\cdot V_2(a,b)+2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)+\textbf{ちょっと}. \tag{9.5}$$

$$I_2=\int_{+h}^{-h}-V_2(a+t,b+h)\,\mathrm{d}t=-2h\cdot V_2(a,b)+2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)+\textbf{ちょっと}. \tag{9.6}$$

結局

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=(2h)^2\left(\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)\right)=\textbf{(正方形の面積)}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{V}(a,b)) \tag{9.7}$$

http://hig3.net