ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] **配布**: 2009-07-04 Sat **更新**: Time-stamp: "2009-06-30 Tue 09:34 JST hig"

9 略解

9.1 略解:線積分 (マーク 2)

1. 2 **つの曲線** C_{1A} **と** C_{1B} **に分割する**.

   y **軸上の部分** C_{1A} **は** $\boldsymbol{r}_{1A}(t) = (0,2) + (0,-1)t$ $(0 \le t \le 2)$. $R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{1A}}{\mathrm{d}t}(t) = R_{\frac{\pi}{2}}(0,-1) = (1,0)$. **これは指定の向きと逆なので** $-(1,0)$ **を用いる**.

   $$\int_{C_{1A}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = \int_0^2 (0, 3(2-t)) \cdot (-1,0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

   x **軸上の部分** C_{1B} **は** $\boldsymbol{r}_{1B}(t) = (-1,0)t$ $(0 \le t \le 2)$. $R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{1A}}{\mathrm{d}t}(t) = R_{\frac{\pi}{2}}(-1,0) = (0,-1)$. **これは指定の向きと逆なので** $-(0,-1)$ **を用いる**.

   $$\int_{C_{1B}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = \int_0^2 (2(-t), (-t) + 3 \cdot 0) \cdot (0,1)\, \mathrm{d}t = -2.$$

   よって, $\displaystyle\int_{C_1} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = 0 + (-2) = -2.$

2. **パラメタ表示** $\boldsymbol{r}(t) = (0,2) + (-2,-2)t$ $(0 \le t \le 1)$ **をとると**, **指定の向きの法線ベクトルは** $-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = -R_{\frac{\pi}{2}}(-2,-2) = -(2,-2) = (-2,2)$.

   $$\int_{C_2} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = \int_0^1 (2(-2t), (-2t) + 3(2-2t)) \cdot (-2,2)\, \mathrm{d}t = 8.$$

3. **パラメタ表示** $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $(\frac{1}{2}\pi \le t \le \pi)$ **より**,

   $$\begin{aligned}\int_{C_3} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \boldsymbol{V}(2\cos t, 2\sin t) \cdot \left(-R_{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \boldsymbol{V}(2\cos t, 2\sin t) \cdot (2\cos t, 2\sin t) = 5\pi - 2.\end{aligned}$$

9.2 略解:線積分 (マーク 1)

模範解答を作ろうプロジェクトに出題中

[1]Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(**講義のページもここからたどれます**), **へや**:1 **号館** 5 **階** 502.

10　ベクトル場の発散を計算しよう!+ガウスの発散定理

今日の目標

- **線積分マーク 2 の意味を知って計算できるようになろう!**
- **ベクトル場の発散の意味を知って計算できるようになろう!**
- **ガウスの発散定理の意味を知って利用できるようになろう!**

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 **問題** 6.8(p.126), **問題** 6.9(p.128), **問題** 8.1(p.174), **問題** 8.2(p.174), **章末問題** [6.3](p.148), **章末問題** [6.3](p.149).

ベクトル場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, **図** 6.8 **より引用**

pdf **バージョンでは図は省略**

チョークを節約するためのノート

復習 重積分 川薩四 p.144 D **が** $x=a_1, x=a_2$, $y=\phi_1(x)$,$y=\phi_2(x)$ **に囲まれた領域のとき**, $f(x,y)$ **の重積分は**

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \tag{10.1}$$

復習 2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開 川薩四 p.118

$$f(a+h,b+t) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと} \tag{10.2}$$

黒板の計算の過程

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-h}^{+h} V_1(a+h,b+t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-h}^{+h}\left(V_1(a,b) + h\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + t\tfrac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと}\right)\mathrm{d}t \\ &=2h\cdot V_1(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + 0 + \textbf{ちょっと}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

同様に

$$I_3 = \int_{+h}^{-h} -V_1(a-h,b+t)\,\mathrm{d}t = -2h\cdot V_1(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b) + \textbf{ちょっと}. \tag{10.4}$$

$$I_4 = \int_{-h}^{+h} +V_2(a+t,b-h)\,\mathrm{d}t = +2h\cdot V_2(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと}. \tag{10.5}$$

$$I_2 = \int_{+h}^{-h} -V_2(a+t,b+h)\,\mathrm{d}t = -2h\cdot V_2(a,b) + 2h^2\cdot\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \textbf{ちょっと}. \tag{10.6}$$

結局

$$I = I_1+I_2+I_3+I_4 = (2h)^2\left(\tfrac{\partial V_1}{\partial x}(a,b)+\tfrac{\partial V_2}{\partial y}(a,b)\right) = \textbf{(正方形の面積)}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{V}(a,b)) \tag{10.7}$$

http://hig3.net