ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-07-06 Mon 更新: Time-stamp: "2009-07-06 Mon 13:01 JST hig"

10 略解

10.1 略解:ガウスの発散定理

1. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}=y^2+2.$

2. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}=4y$. よって,

$$\int_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}\ \mathrm{d}S=\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}}4y\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left[2y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x$$
$$=\int_{-2}^{2}2(4-x^2)\ \mathrm{d}x=\tfrac{64}{3}.$$

3. C_1 のパラメタ表示として $\boldsymbol{r}(t)=(t,0)\ (-2\le t\le 2)$ をとる. $\boldsymbol{n}$ と同じ向きの法線ベクトルは $-R_{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=(0,-1)$. よって

$$I_1=\int_{-2}^{2}(0,2\cdot 0^2-3)\cdot(0,-1)\ \mathrm{d}t=12.$$

C_2 のパラメタ表示として $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,2\sin t)\ (0\le t\le\pi)$ をとる. $\boldsymbol{n}$ と同じ向きの法線ベクトルは $-R_{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)=(2\cos t,2\sin t)$. よって

$$I_2=\int_0^{\pi}(0,8\sin^2 t-3)\cdot(2\cos t,2\sin t)\ \mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(5-8\cos^2 t)(2\sin t)\ \mathrm{d}t=[-10\cos t+\tfrac{16}{3}\cos^3 t]_0^{\pi}=\tfrac{28}{3}.$$

なお, パラメタ表示として $\boldsymbol{r}(t)=(t,\sqrt{4-t^2})\ (-2\le t\le +2)$ などを取ることも可能. 計算は同程度,

11 曲面のパラメタ表示と方程式

今日の目標

- 積分公式の深い意味を知ろう!
- 曲面のパラメタ表示から曲面を描けるようになろう!
- 曲面の接平面と法線ベクトルを計算できるようになろう!

[1]Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

11.1 quiz:曲面の法線ベクトルと接平面

曲面 $\boldsymbol{r}(s,t)=(t\sin s, t\cos s, t^4)$ **を考えよう**. $(0\leq s<2\pi, 0\leq t<+\infty)$.

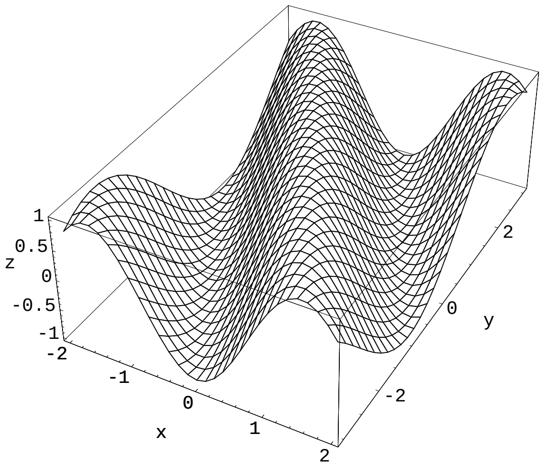
1. s,t **を消去して** x,y,z **で書かれた方程式を求めよう**. (*Hint.* $\sin^2 s+\cos^2 s=1$.)
2. **曲面上の点** $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ **における** 2 **つの接ベクトル** $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi,2), \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi,2)$ **を求めよう**.
3. **曲面上の点** $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ **における法ベクトルを求めよう** (**単位法ベクトルにはしなくてよい**).
4. **曲面上の点** $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ **における接平面をパラメタ表示しよう**.
5. **曲面上の点** $\boldsymbol{r}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\sqrt{3},1,16)$ **における接平面の方程式を求めよう**.

11.2 quiz:平面のパラメタ表示と方程式

xz **平面に平行で**, $(0,4,0)$ **を通る平面のパラメタ表示と方程式を求めよう**.

曲面のパラメータ表示

$\boldsymbol{r}(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t))=(s,t,\cos(t+2s))$.



今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小高 **問題** 2.45(p.62), **問題** 2.46(p.63), **問題** 2.47(p.64), **問題** 2.48(p.64), **章末問題** [2.9](p.65).