ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-07-20 Mon 更新: Time-stamp: "2009-07-24 Fri 10:35 JST hig"

12 略解:曲面の法線ベクトルと接平面を描こう+曲面上の面積分を計算しよう!

12.1 略解:曲面の法線ベクトルと接平面

1. $x^2+y^2=t^2$ より, $z=(x^2+y^2)^2$.

2. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(1,\sqrt{3},0)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi,2)=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},32)$.

3. $$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi,2)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi,2)}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(-\frac{1}{3}\pi,2)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(-\frac{1}{3}\pi,2)\right|}=\pm\frac{(32\sqrt{3},-32,2)}{\text{面倒}}$$

   よって, 単位じゃないけど $(32\sqrt{3},-32,+2)$ は法ベクトル.

4. $\boldsymbol{r}_{\text{接}}(s,t)=(-\sqrt{3},1,16)+(1,\sqrt{3},0)s+(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},32)t$.

5. $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(\frac{1}{3}\pi,2))=0$ より, $32\sqrt{3}(x+\sqrt{3})-32(y-1)+2(z-16)=0$ すなわち $32\sqrt{3}x-32y+2z=-96$.

12.2 略解:曲面の接平面

1. パラメタ表示を左辺に代入すると 4 になる. これは中心が原点, 半径が 2 の球面を, z 軸方向に 2 倍に拡大した曲面.

2. $$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)&=(-2\sin t\sin s,2\sin t\cos s,0),\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(\tfrac{2}{3}\pi,\tfrac{1}{6}\pi)&=(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{1}{2},0).\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)&=(2\cos t\cos s,2\cos t\sin s,-4\sin t).\\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(\tfrac{2}{3}\pi,\tfrac{1}{6}\pi)&=(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{3}{2},-2).\end{aligned}$$

   よって, $\boldsymbol{r}(t)=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})+(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)s+(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},-2)t$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -2) = (1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. これは内向きであることがわかるので, $-(1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.
4. $(\boldsymbol{r} - (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ より $(x + \frac{1}{2}) - \sqrt{3}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \sqrt{3}(z - 2\sqrt{3}) = 0$.

13　曲面上の面積分, 体積分, 3 次元のガウスの発散定理

今日の目標

- 曲面上の面積分 $\displaystyle\int_S f \,\mathrm{d}S$ を計算できるようになろう!
- 曲面上の面積分 $\displaystyle\int_S (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}S$ の便利な計算法を知ろう!
- パラメタ表示された 3 次元の領域上の体積分 $\displaystyle\int_D f \,\mathrm{d}V$ を計算できるようになろう.

13.1　quiz:曲面上の面積分

曲面 S のパラメタ表示を,

$$\boldsymbol{r}(s,t) = (-2t, t\cos s, t\sin s) \qquad (0 \le s < 2\pi, 1 \le t \le 3) \tag{13.1}$$

とする. また, ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0, 3y, 0)$ を考える.

1. 曲面 S の面積を求めよう.
2. 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$ を求めよう. ただし, 曲面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は x 成分が負である向き.
3. 暇と興味のある人は S の形を妄想して描いてみよう.

13.2　quiz:曲面上の面積分

曲面 S を原点を中心とする半径 3 の球面とする. 曲面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を外向きにとる. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, z^3)$ を考える. 球座標を用いて, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S$ を求めよう.

13.3　quiz:体積分

領域 D **を原点を中心とする半径** 3 **の球の内部とする．ベクトル場** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, z^3)$ **を考える．**

1. **ベクトル場の発散** $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ **を求めよう．**
2. **球座標を用いて，** $\int_D (\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \mathrm{d}V$ **を求めよう．** Jacobian **が必要であることに注意しよう．**

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

面積分 $\boxed{\text{小高}}$ **問題** 4.11(p.98), 4.12(p.99), **章末問題** [4.6](p.105), [4.7](p.105).

$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}$ **の面積分** $\boxed{\text{小高}}$ **問題** 4.15(p.103), **章末問題** [4.7](4)(p.105), [4.8](p.106).

立体のパラメター表示と体積分

問題 5.1–6(p.109–114), **章末問題** [5.1]–[5.5](p.114–115).

球座標

問題 2.18(p.49), **問題** 2.19(p.49).

球座標

r:**原点からの距離**
θ: **緯度 (南緯** $-\frac{\pi}{2}$**)**
ϕ: **経度 (東経** $+\pi$**)**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(r, \theta, \phi) &= (x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) \\ &= (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) \qquad (0 \le r, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi). \\ \text{Jacobian} \quad |J| &= r^2 \sin\theta. \end{aligned}$$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) 図 4.6,5.3 より引用

pdf バージョンでは図は省略

ファイナルトライアル出題計画!(更新版)

1. スカラー場, ベクトル場の勾配, 発散, 渦度回転を求める問題.
2. 曲面の単位法線ベクトルと接平面 (方程式およびパラメタ表示) を求める問題.
3. 曲面 S 上で面積分 $\int_S f \, \mathrm{d}S$, $\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$ を計算する問題.
4. パラメタ表示された領域上の体積分を計算する問題
5. 2 次元のガウスの発散定理を使って閉曲線に沿った線積分マーク 2 を面積分に直したり (あるいはその逆) して計算する問題
6. グリーンの定理を使って閉曲線に沿った線積分マーク 1 を面積分に直したり (あるいはその逆) して, 計算する問題.
7. 3 次元のガウスの発散定理を使って閉曲面上のベクトル場の面積分を体積分に直したり (あるいはその逆) して計算する問題