ベクトル解析∇

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-07-20 Mon 更新: Time-stamp: "2009-07-21 Tue 09:10 JST hig"

13 略解:曲面上の面積分, 体積分, 3次元のガウスの発散定理

13.1 略解:曲面上の面積分

1. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)=(0,-t\sin s,t\cos s)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)=(-2,\cos s,\sin s)$ より,

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right|=|(-t,-2t\cos s,-2t\sin s)|=\sqrt{5t^2}=\sqrt{5}\cdot t$$

面積は

$$\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3\sqrt{5}t\ \mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s=8\sqrt{5}\pi.$$

2. 法線ベクトル (の正の定数倍) 候補である $\pm(-t,-2t\cos s,-2t\sin s)$ のうち, $1\le t\le 3$ の範囲で x 成分が負になるのは $+$ をとったときだから, $+$ を選ぶ. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))=(0,3t\cos s,0)$ より,

$$\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s,t)\right)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^3-6t^2\cos^2 s\ \mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s=-52\pi.$$

3. 方程式 $4(x^2+y^2)=z^2$ で表される曲面の一部. 傘の真ん中に丸い穴があいたような曲面.

13.2 略解:曲面上の面積分

パラメタ表示は $\boldsymbol{r}(\theta,\phi)=(3\sin\theta\cos\phi,3\sin\theta\sin\phi,3\cos\theta)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(\theta,\phi))=&\boldsymbol{V}(3\sin\theta\cos\phi,3\sin\theta\sin\phi,3\cos\theta)=(0,0,3^3\cos^3\theta)\\ \text{法線ベクトル }\boldsymbol{N}=&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}(\theta,\phi)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}(\theta,\phi)\\ =&(3\cos\theta\cos\phi,3\cos\theta\sin\phi,-3\sin\theta)\times(3\sin\theta\sin\phi,-3\sin\theta\cos\phi,0)\\ =&(-9\sin^2\theta\cos\phi,-9\sin^2\theta\sin\phi,-9\cos\theta\sin\theta)\end{aligned}$$

外向き法線ベクトルは $-\boldsymbol{N}$. なぜなら, $\boldsymbol{r}(\frac{1}{2}\pi,0)=(3,0,0)$ で $\boldsymbol{N}=(-9,0,0)$ だが, これは内向きだから, 逆向きにしておく必要がある.

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(\theta,\phi))\cdot(-\boldsymbol{N})=243\cos^4\theta\sin\theta.$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

よって,

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_)^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; 243 \cos^4 \theta \sin \theta = 243[-\tfrac{1}{5} \cos^5 \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} = \tfrac{972}{5}\pi.$$

13.3 略解:体積分

1. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = 0 + 0 + 3z^2$.

2. 球座標の Jacobian が $r^2 \sin \theta$ であることに注意して,

$$\int_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} \; \mathrm{d}V = \int_0^3 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; 3(r \cos \theta)^2 \cdot r^2 \sin \theta = 3[\tfrac{1}{5} r^5]_0^3 [-\tfrac{1}{3} \cos^3 \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} = \tfrac{972}{5}\pi$$

http://hig3.net