曲線の接線と曲線の長さ

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L02(2011-04-20 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-04-21 Thu 11:37 JST hig"

今日の目標

1. 曲線の単位接線ベクトルが求められる
2. 曲線の接線のパラメタ表示が求められる
3. 曲線の長さが求められる

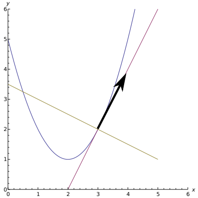
http://hig3.net

曲線の接線ベクトル

曲線 $\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における接線の向きは $\boxed{\text{接線ベクトル}}$ $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ で与えられる.

なぜ? $\mathbf{r}(t)$ が位置ベクトルなら $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ は速度ベクトル.

物理数学 I



例 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$

の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における接線ベクトルは?

曲線の接線のパラメタ表示

曲線の接線のパラメタ表示

$\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における接線のパラメタ表示は

$$\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) \cdot (t - t_0)$$

例 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$ の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における接線は?

注意

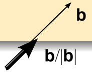
- 直線は $\mathbf{r}(t) = \mathbf{B} + \mathbf{A}t$ だった.
- t を $t - t_0$ にしてもいいでしょ.
- そうするとテーラー展開を 1 次で打ち切ったみたいに見えるし.
- 放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ の接線の方程式と比べてみよう.

数学 II, 数学 III

単位接線ベクトル

単位ベクトル

$\mathbf{a}$ の長さが 1 (絶対値 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1$) のとき, $\mathbf{a}$ を単位ベクトルという.
$\mathbf{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.



接線ベクトルが $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ なら, $\boxed{\text{単位接線ベクトル}}$ は $\dfrac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right|}$.

例 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$ の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における単位接線ベクトルは?

問題 (曲線の単位接線ベクトル)

曲線 $\mathbf{r}(t) = (-t^2, t)$ を考える.

1. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における接線ベクトル, 単位接線ベクトルを求めよう.
2. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.

曲線の長さ

曲線の長さ

曲線が $\mathbf{r}(t)$ $(T_0 \le t \le T_1)$ とパラメタ表示されるとき, 曲線の長さ L は, 小高 §3.2(p.70)

$$L = \int_{T_0}^{T_1} \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \, \mathrm{d}t.$$

注

- $|\mathbf{b}|$ はベクトル $\mathbf{b}$ の絶対値.
- 方程式表示 $y = f(x)$ では

$$L = \int_b^a \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2} \, \mathrm{d}x$$

だった.

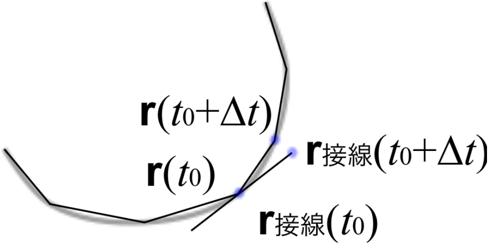
数学 III

理由 (物理のり) $\mathbf{r}(t)$ を時刻 t における位置ベクトルとすれば, $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|$ は速さ. 速さの時間積分は道のり.

理由 (数学のり) 曲線は折れ線で近似できる.
$\mathbf{r}(t_0)$ と $\mathbf{r}(t_0+\Delta t)$ の間の距離は, $\mathbf{r}(t_0)$ における接線 $\mathbf{r}_{接線}(t)$ を考えると, $\mathbf{r}_{接線}(t_0)$ と $\mathbf{r}_{接線}(t_0+\Delta t)$ の間の距離で近似できる.

$$\begin{aligned} &\left|\mathbf{r}_{接線}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}_{接線}(t_0)\right| \\ =&\left|(\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot(t_0+\Delta t-t_0))-(\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot(t_0-t_0))\right| \\ =&\left|\mathbf{A}\right|\Delta t \\ =&\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right|\Delta t. \end{aligned}$$

折れ線の長さを全部加える $\leftrightarrow$ t 積分.



問題 (パラメタ表示された曲線の長さ)

1. パラメタ表示された曲線 $\mathbf{r}(t) = (-2t, 3t)$ $(-1 \leq t \leq 2)$ の長さを積分で求めよう.
2. パラメタ表示された曲線 $\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos 3t, 2 + 2\sin 3t)$ $(0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi)$ の長さを積分で求めよう.

Hint. 小学校のりでも検算できるはず.

曲線の法線ベクトル

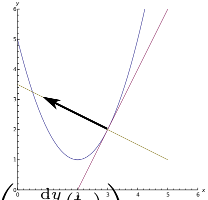
曲線 $\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における法線の向きは, 接線ベクトル $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ を $\frac{\pi}{2}$ ラジアン回転させて得られる. これを $\boxed{\text{法線ベクトル}}$ という.

$\frac{1}{2}\pi$ の回転行列

線形代数

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここだけ臨時に縦ベクトルだと思ってね.



法線ベクトル $\mathbf{N} = R_{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ +\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) \end{pmatrix}$

例 直線 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$ の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における法線ベクトルは?

曲線の法線のパラメタ表示

曲線の法線のパラメタ表示

$\mathbf{r}(t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ における法線のパラメタ表示は

$$\mathbf{r}_{\text{法線}}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) \cdot (t - t_0)$$

例 直線 $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5)$ の $\mathbf{r} = (3, 2)$ における法線のパラメタ表示は?

注意

- 方程式表示での法線: 垂直なら傾きの積が -1　　数学 II, 数学 III
- 法線ベクトルが $\mathbf{N}$ なら, $\boxed{\text{単位法線ベクトル}}$ は $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$.
- (単位) 法線ベクトルは, -1 倍しても (単位) 法線ベクトル (つまり 2 個ある).

問題 (曲線の単位法線ベクトル)

曲線 $\mathbf{r}(t) = (-t^2, t)$ を考える.

1. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における法線ベクトル, 単位法線ベクトルを求めよう.
2. $\mathbf{r} = (-4, -2)$ における法線のパラメタ表示を求めよう.

連絡

大事な連絡

- 先週の quiz は先週の時間内に解説済.
- プレテスト返却. 次のページ参照.
- 前回配布の資料で, 使わなかったページは×つけておいてください. 今後も同じ. Web にいちおうやった範囲 (ページ数で) 書いてます.
- プチテストの日程を訂正. 2011-06-~~15~~08 水 1 を予定.

教科書のお奨め問題

- ベクトル値関数の微分 $\boxed{\text{小高 問題 2.33–39}}$
- パラメタ表示, 接線ベクトル $\boxed{\text{小高 問題 2.41–44, 章末問題 [2.8],[3.7]}}$
- 法線ベクトルは, 教科書では使ってるけどまとめて説明してはいない.
- 曲線の長さ $\boxed{\text{小高 問題 3.2–4, 章末問題 [3.3],[3.4]}}$

予習復習問題をやろう! 来週の朝の quiz では似た問題やります. プチテスト, ファイナルトライアルの一定部分はこれと対応する問題です.