ベクトル場の線積分

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L05(2011-05-18 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-05-19 Thu 10:45 JST hig"

今日の目標

1. 風がペンギンのどちら側の羽にあたるか答えられる
2. ベクトル場の曲線にそった線積分 (マーク 1) が計算できる

http://hig3.net

先週の Quiz の講評

$f'(\mathbf{r}(t))$ という書き方はしない．それは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\mathbf{r}(t))$.
$f(x) = \cos x, g(x) = 3x$ のとき，$f'(g(x)) = -\sin 3x$ であって
$f'(g(x)) = -3\sin 3x$ じゃないでしょ．それは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = -3\sin 3x$.

略解 (スカラー場の線積分とケーキの切り口)

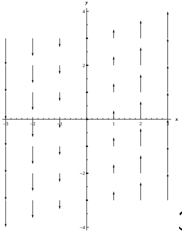
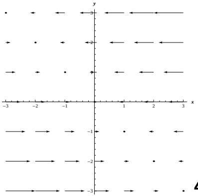
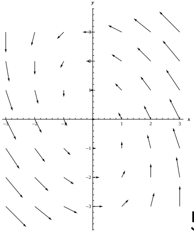
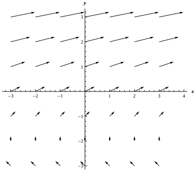
$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-4\sin 2t, 4\cos 2t)$. $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| = 4$.

1.
$$L = \int_0^{\pi/2} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 4 \,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

2.
$$\begin{aligned}
&\int_C f(\mathbf{r}) \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sin 2t \cdot 4 \,\mathrm{d}t = 8.
\end{aligned}$$

略解 (ベクトル場を描こう)

1. $\mathbf{V}(0,1)=(0,1), \mathbf{V}(2,3)=(-2,5), \mathbf{V}(0,4)=(-3,4), \mathbf{V}(-5,6)=(-5,1)$.

2.  3.  4.  5. 

2. では, 直線 $x=k$ (k は定数) 上では $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が等しい.
3. では, 直線 $y=-x+k$ (k は定数) 上では $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が等しい.
5. では, 直線 $y=-2$ 上でベクトルが y 軸の正の向きになる.

問題 (吹雪の中のペンギン)

風は時間によらず一定で, 位置 $\mathbf{r} = (x, y)$ の風は, ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2x^2 - 1, 2xy)$ で与えられる. また, このエリアを直立 2 本足歩行するジェンツーペンギンの, 時刻 t での位置は $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $(-\frac{3}{4}\pi \leq t \leq +\frac{3}{4})$ で与えられる

1. 時刻 t のジェンツーペンギンが感じる風を表すベクトルを求めよう.
2. 時刻 t のジェンツーペンギンのくちばしの向きのベクトルを求めよう.
3. ジェンツーペンギンの正面から風が吹いてくる時刻を求めよう.
4. ジェンツーペンギンの真横から風が吹いてくる時刻を求めよう. この時刻に, 風はアデリーペンギンのくちばしの右側にあたるか左側にあたるか答えよう.

ベクトル場の線積分 (マーク 1) の定義

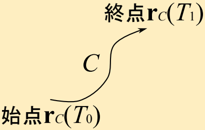
ベクトル場の

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の, (向きのある) 曲線 C に沿った線積分 $\boxed{\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}$ とは,

C のパラメタ表示 $\mathbf{r}(t)$ $(T_0 \leq t \leq T_1)$ をとって

- 単位接線ベクトル $\mathbf{t} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|}$
- スカラー場 $f(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}$

を考えたときの, スカラー場 f の C 上の線積分のこと. 小高 §3.2(p.75)



$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C f(\mathbf{r})\, \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1} \{\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{t}\} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t.$$

ベクトル場の線積分 (マーク 1) の意味

吹雪の中を C に沿って歩くアデリーペンギンの位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$.

- $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$ はペンギンの $\boxed{\qquad\qquad}$
- 単位接線ベクトル $\mathbf{t} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|}$ は $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
- $f = \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{t}$ はペンギンの $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

  $= (-1)\times$(ペンギンの $\boxed{\qquad\quad}$)

スカラー場の線積分
=切り口の面積

$= (-1)\times C$ を歩くときのペンギンの $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$

ベクトル場の線積分 (マーク 1) の計算方法

定義そのままで計算できるけど, こっちを公式と思おう.

$$\boxed{\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\, \mathrm{d}t.}$$

だって,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_C f(\mathbf{r})\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{T_0}^{T_1} \{\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{t}\} \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_{T_0}^{T_1} \left\{ \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|} \right\} \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

問題 (線積分)

ベクトル場 $\mathbf{V}(x, y) = (-x + 2y, 3x + 4y)$ と曲線 $C_5 : \mathbf{r}_5(t) = (2t, -3t^2) \quad (-2 \leq t \leq 0)$ を考える．曲線 C_5 に沿ったベクトル場 $\mathbf{V}$ の線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_{C_5} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ を求めよう．ただし，$(-4, -12)$ を始点，$(0, 0)$ を終点とする．

問題 (線積分)

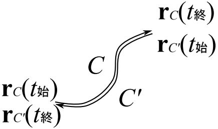
パラメタ表示された曲線 C, $\mathbf{r}(t) = (-t^2, 2t^3)$, $(1 \leq t \leq 3)$ を考える. ただし始点 $\mathbf{r}(1) = (-1, 2)$, 終点 $\mathbf{r}(3) = (-9, 54)$ とする.

1. 曲線 C の長さを求めよう.
2. 曲線 C に沿った, ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (y, -3x + 2y)$ の線積分 (マーク 1) を求めよう.

ベクトル場の線積分 (マーク 1) の性質

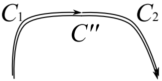
C' が C の向きだけを逆にした曲線のとき

$$\boxed{\int_{C'} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = (-1) \times \int_{C} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}}$$



C'' が C_1 の終点と C_2 の始点をつなげた曲線のとき

$$\boxed{\int_{C} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}}$$



なぜ? パラメタ表示してみると, ふつうの 1 変数の積分の公式と同じ.

$$\int_b^a f(t)\,dt = (-1) \times \int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

今まで始点 $T_0 <$ 終点 T_1 となるようにパラメタ表示しろって言ってきたけど, 逆向きの曲線を考えると, $T_{始}, T_{終}$ の大小は気にせず, いつでも

$$\boxed{\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{T_{始}}^{T_{終}} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\,dt.}$$

問題 (線積分)

ベクトル場 $\mathbf{V}(x,y) = (-x+2y, 3x+4y)$ の曲線 C に沿った線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{r}$ を求めよう. ただし, C は 始点 $(0,0)$, $(-4,0)$, 終点 $(-4,-12)$ を順に線分でつなぐ折れ線.

連絡

大事な連絡

- 前回の Quiz は 4 点+8 点.
- プチテストは 2011-06-08 水 1 を予定.
- 前土 2 の教師論は今年とろう! 時間割上は見えないけど来年にひびく.

教科書のお奨め問題

- ベクトル場 小高 問題 2.5–6, 章末問題 [2.2]
- ベクトル場の線積分 小高 問題 3.11,12(p.76), 章末問題 [3.4], [3.5], [3.6](1)(p.81)