スカラー場の勾配

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L06(2011-05-25 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-05-25 Wed 11:23 JST hig"

今日の目標

1. スカラー場の勾配ベクトル場を求められる.
2. スカラー場の等高線と勾配ベクトル場を描ける
3. ベクトル場が保存的であるかどうか判定できる

http://hig3.net

略解 (吹雪の中のペンギン)

1. $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = (2\cos^2 t - 1, 2\sin t \cos t)$.
2. $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-\sin t, \cos t)$.
3. $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \parallel \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ すなわち $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) = a \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ となる必要がある. 比が等しいという式だから, 内項の積と外項の積は等しい.
$$\begin{aligned}(2\cos^2 t - 1)\cos t =& 2\sin t \cos t \cdot (-\sin t)\\ \cos t(2\cos^2 t + 2\sin^2 t - 1) =& 0\end{aligned}$$
よって $\cos t = 0$ すなわち, $t = \pm\frac{\pi}{2}$.
$t = +\frac{\pi}{2}$ のとき, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$ より風とくちばしは同じ向きで, 背中からの風.
$t = -\frac{\pi}{2}$ のとき, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(-\frac{\pi}{2})) = (-1, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(-\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$ より風とくちばしは逆の向きで, 正面からの風.
4. $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \perp \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ すなわち内積 $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ となる必要がある.
$$(2\cos^2 t - 1)(-\sin t) + 2\sin t \cos t \cos t = 0$$
よって $\sin t = 0$ すなわち $t = 0$. このとき, $\mathbf{V}(\mathbf{r}(0)) = (1, 0)$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(0) = (0, 1)$. 図より, くちばしの左側に風があたる.

略解 (線積分)

始点が $(-4,-12)=\mathbf{r}(-2)$ 終点が $(0,0)=\mathbf{r}(0)$ なので

$$\begin{aligned}&\int_{C_1}\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\\ &=\int_{-2}^{0}\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{-2}^{0}(-(2t)+2(-3t^2),3(2t)+4(-3t^2))\cdot(2,-6t)\,\mathrm{d}t=\cdots=-408.\end{aligned}$$

略解 (線積分)

1. $\frac{2}{27}(82\sqrt{82}-10\sqrt{10})$.
2. $17948/5$.

略解 (線積分)

C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (t, 0)$ $(-4 \le t \le 0)$, 始点 $\mathbf{r}_1(0)$, , 終点 $\mathbf{r}_1(-4)$.
C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (-4, t)$ $(-12 \le t \le 0)$, 始点 $\mathbf{r}_2(0)$, 終点 $\mathbf{r}_2(-12)$.

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
=& \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
=& \int_0^{-4} (-t, 3t) \cdot (1, 0)\ \mathrm{d}t + \int_0^{-12} (4 + 2t, -12 + 4t) \cdot (0, 1)\ \mathrm{d}t \\
=& -8 + 432 = 426.
\end{aligned}$$

新しいスカラー場/ベクトル場を作ろう

例:
スカラー場 $f(\mathbf{r}) = x + 2y$.
ベクトル場 $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) = (3xy, 4y^2)$, $\mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = (5\mathrm{e}^y, 6\mathrm{e}^x)$.

新しいスカラー場

- 定数倍 $-3f(\mathbf{r}) = (-3)(x + 2y)$.
- $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = 3xy \cdot 5\mathrm{e}^y + 4y^2 \cdot 6\mathrm{e}^x$

新しいベクトル場

- 和 $\mathbf{V}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_2(\mathbf{r}) = (3xy + 5\mathrm{e}^y, 4y^2 + 6\mathrm{e}^x)$.
- $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = (3xy(x + 2y), 4y^2(x + 2y))$.

勾配:スカラー場から新しいベクトル場を作り出す方法

スカラー場の勾配ベクトル場

$f(\mathbf{r})$ をスカラー場とする．このときベクトル場

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

を f の 勾配 (gradient) といい，$\boldsymbol{\nabla} f$ とかく．太字注意．

逆に，f を $\mathbf{V}$ の (スカラー) ポテンシャル という．小高 §6.1(p.121)

記号: $\boldsymbol{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. 読み方:ナブラ　ベクトル (場) みたいなもの．

スカラー倍みたいな気分 $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f)$.

例: $f(\mathbf{r}) = xy^2 + y^3$ のとき $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) =$ $\boxed{}$.

例: $f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$ のとき $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}) =$ $\boxed{}$.

∇f の直観的意味

$f(\mathbf{r})$ を, 地点 $\mathbf{r}$ での山の高さだと思うのがいちばんいいかも.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r})$: x 軸の正の向きに歩いたときの, 高さの増加率.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r})$: y 軸の正の向きに歩いたときの, 高さの増加率.

∇f の意味:勾配=登坂率

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$

- 向き:
- 大きさ: そっちに歩いたときの高さの増加率. 水平に x m 進んだとき, 高さが z m 変化する $\rightsquigarrow \frac{z}{m}$

小高 §6.1(p.118)

http://www.freemap.jp/

f の等高線を描いてみよう!

$f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$ の等高線を描いてみよう.

中学地理の復習

- 線で結ばれたところは同じ高さ
-

f の等高線と ∇f の関係

勾配は法線ベクトル

∇f は, f の等高線の法線ベクトル (つまり:∇f と, f の等高線は直交.)

なぜなら:等高線に沿って歩くペンギンの位置ベクトルを $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ とすると

$$f(x(t), y(t)) = \text{一定}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t))} = 0$$

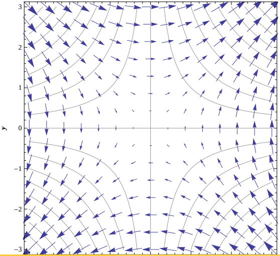
偏微分の合成微分の公式より

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = 0$$

$$(\nabla f(\mathbf{r}(t))) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$$

例: $f(\mathbf{r}) = xy$.

$\nabla f(\mathbf{r}) = \boxed{}$.



- $f(\mathbf{r}) = 10 - |\mathbf{r}|^2$ の等高線と，ベクトル場 ∇f を描いてみよう．
- $f(\mathbf{r}) = x + y^2$ の等高線と，ベクトル場 ∇f を描いてみよう．
- 小高 問題 6.5

等高線に重ねた ∇f の描き方

- ベクトルの向き: 等高線に直交．
- ベクトルの大きさ: 等高線の間隔が狭い (=急なほど) ほど大きい．

中学理科の例 $f(\mathbf{r})$ が地点 $\mathbf{r}$ の気圧のとき，風は $-\nabla f$ にだいたい比例．

$\boldsymbol{\nabla} f$ の線積分は超簡単

$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r})$ の線積分を考える．曲線 C:$\mathbf{r}(t)$, 始点 $\mathbf{r}(T_0)$, 終点 $\mathbf{r}(T_1)$.

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$
$$= \int_{T_0}^{T_1} \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{T_0}^{T_1} \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} \mathrm{d}t$$

偏微分の合成微分の公式

$$= \int_{T_0}^{T_1} \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{r}(t))} \mathrm{d}t$$
$$= f(\mathbf{r}(T_1)) - f(\mathbf{r}(T_0))$$

登坂率の積分=高さの差

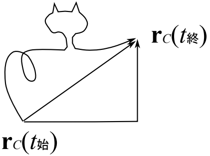
$\boldsymbol{\nabla} f$ の線積分

- 始点と終点だけから決まってる!

$\rightsquigarrow$ f さえわかれば, 始点終点の値の差が答え

- 曲線 C の形によらない!

$\rightsquigarrow$ 始点終点が同じなら, 曲線 C を自分の好きなものに交換していい



保存場の判定条件

定義

ベクトル場 $\mathbf{V}$ が $\boxed{\text{保存的}}$(保存場) であるとは, $\mathbf{V} = \nabla f$ となる f(ポテンシャル) があること.

保存的であるための必要条件 $\dfrac{\partial V_2}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1}{\partial y} = 0$

なぜなら: $V_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}, V_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ のとき $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ (偏微分の性質)

これは実は十分条件 小高 問題 6.36

あれっ完全型微分方程式の条件に似てる…　数理モデル基礎 I

保存的

$\mathbf{V}$ に関する 3 つの条件はぜんぶ同じ (必要十分)

- ベクトル場 $\mathbf{V}$ が保存的である
- $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla} f$ となるようなスカラー場 f がある
- $\boxed{\text{渦なし条件}}$ $\dfrac{\partial V_2}{\partial x} - \dfrac{\partial V_1}{\partial y} = 0$ が成立する

問題 (スカラー場の勾配)

スカラー場 $f(\mathbf{r}) = xy^4$ を考える.

1. 勾配ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla} f$ を求めよう.
2. 勾配ベクトル場 $\boldsymbol{\nabla} f$ の, 曲線 C : $\mathbf{r}(t) = (-2, 1)t + (3, 1)$, $(0 \leq t \leq 1)$ に沿った線積分 (マーク 1) を楽に求めよう. ただし, $(3, 1)$ を始点, $(1, 2)$ を終点とする.

問題 (渦無し条件)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (y, -x)$ は保存場か. 理由とともに答えよう.

問題 (スカラー場の勾配と等高線)

スカラー場 $f(\mathbf{r}) = x^2 + 4y^2$ の等高線と，重ねて勾配ベクトル場 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla} f$ を描こう．

問題 (保存場の線積分)

保存場 (渦なし条件を満たすベクトル場) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2xy^2 + 5x^4, 2x^2y + 4y)$ に対してベクトル場の線積分 (マーク 1) を求めよう．ただし，積分経路は $C : \mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t), (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$．始点が $(2, 0)$，終点が $(0, 2)$．

連絡

プチテストやります!

- 2011-06-08 水 1. 90 分. 30 ピーナッツ. 参照なし. 公欠届.
- 過去問を参考にしすぎないこと. 似ているけどやってることは同じじゃない. 出題ののりは変える予定.
- これまでの quiz/問題が楽にできるようになっておくことがお奨め.

プチテスト出題計画 2011-06-01 水の授業で更新します.

- 曲線のパラメタ表示を作ろう!(L01)
- パラメタ表示された曲線を描こう!(L01)
- (単位) 接線ベクトル, 接線のパラメタ表示を求めよう!(L02)
- (単位) 法線ベクトル, 法線のパラメタ表示を求めよう!(L02)
- スカラー場の曲線上の線積分=曲線の長さを計算しよう!(L03)
- スカラー場の曲線上の線積分=切り口の面積を計算しよう!(L04)
- アデリーペンギンの感じる温度と風を求めよう!(L05)
- ベクトル場の曲線に沿った線積分を計算しよう!(L05)
- スカラー場の勾配を求めよう!(L06)
- スカラー場の等高線と勾配ベクトル場を描こう!(L06)

連絡

大事な連絡

- 前回の Quiz は 12 点.
- プチテストは 2011-06-08 水 1 を予定.

教科書のお奨め問題

- ベクトル場の線積分 小高 問題 3.11,12(p.76), 章末問題 [3.4], [3.5], [3.6](1)(p.81)
- スカラー場の勾配 小高 問題 6.2,3
- 保存的ベクトル場の線積分 小高 問題 6.30(p.143),6.32(p.143)
- 渦なし条件 小高 問題 6.34(p.144), 章末問題 [6.5](p.149)
- ポテンシャル f を見つける 小高 問題 6.37(p.146)