渦度とグリーンの定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L08(2011-06-15 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-06-23 Thu 19:02 JST hig"

今日の目標

1. 保存的/非保存的なベクトル場の閉曲線に沿った線積分が計算できる
2. グリーンの定理の定理の意味と使い方を説明できる
3. 渦度の定義と意味と使い方を説明できる

http://hig3.net

略解 (線積分)

このベクトル場は渦なし条件を満たし, 保存的であることがわかる. ポテンシャルは霊感により $f(\mathbf{r}) = x^2y^2 + x^5 + 2y^2$. 実際 $\nabla f = \mathbf{V}$ となっている. よって, $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(0,2) - f(2,0) = 2^3 - 2^5 = -24$.

以下, ポテンシャルを求めたくない場合の別解. この曲線じゃやってられないので, C_1: $\mathbf{r}_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 2)$, C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (0,t)$ $(0 \le t \le 2)$ をつなげた折れ線 C_3 を考える.

$$
\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
=&\int_{C_3} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
=&\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\
=&\int_2^0 (5t^4, 0) \cdot (1,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 (0, 4t) \cdot (0,1)\,\mathrm{d}t \\
=&[t^5]_2^0 + [2t^2]_0^2 = (0-32) + (8-0) = -24.
\end{aligned}
$$

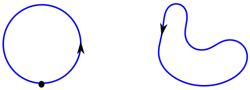
略解 (線積分)

1. $(\nabla \times \mathbf{V})_z = 5y - 0 \neq 0$ より保存的でない．よって，ポテンシャルを求めたり，好きな積分路に変更したりするような解法はとれない．
2. 与えられたパラメタ表示を用いて，$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = (-3t^2, 3)$ より

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1, 5(-t^3)3t - 9t^2) \cdot (-3t^2, 3)\,\mathrm{d}t = -19.\end{aligned}$$

閉曲線

$\boxed{\boxed{\text{閉曲線}}}$とは,
始点と終点の一致する (向きのついた) 曲線.



ベクトル場の閉曲線 C に沿った線積分

保存的/非保存的ベクトル場の閉曲線 C に沿った線積分 $I = \displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.
は, 始点 (=終点) によらない.

なぜなら 小高 あたりまえだから?載ってない

問題 (ベクトル場の閉曲線に沿った線積分)

曲線 C を単位円とする．向きは反時計回りとする．

1. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (1, 3)$ の C に沿った線積分を求めよう．
2. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (-y, x)$ の C に沿った線積分を求めよう．

保存的ベクトル場の閉曲線 C に沿った線積分

$\mathbf{V}$ が保存的ベクトル場, C が閉曲線のとき,

$$I = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \boxed{}$$

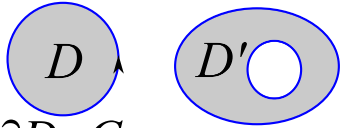
なぜなら $\boxed{}$.

小高 問題 [6.31]

領域と境界

$\boxed{\text{領域}}$ D とは連結な開集合のこと．　　集合位相

領域の境界は閉曲線であり，記号 $\boxed{\quad\quad}$ であらわす．



$\partial D = C$

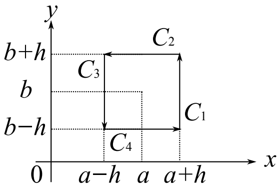
境界の閉曲線のデフォルトの向きを

その向きに進むと $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$ 向き，と定める．

さっきの問:‘$\mathbf{V}$ を単位円板の境界に沿って線積分する’

ベクトル場の小さな領域の境界に沿った線積分

領域 D として 点 (a,b) を中心とする, 一辺 $2h$ の小さな正方形を考える. 小高 §6.3



$$I = \int_C \mathbf{V} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

$$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}, \ldots$$

どれも $-h \leq t \leq h$, 始点 $\mathbf{r}(-h)$, 終点 $\mathbf{r}(+h)$ のパラメタ表示.

C_1:

C_2: $\mathbf{r}_2(t) = (a - t, b + h)$

C_3:

C_4:

$\mathbf{V} = (V_1, V_2)$.

$$I_1 = \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{-h}^{+h} \mathbf{V}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-h}^{+h} \mathbf{V}(a+h, b+t) \cdot (0, +1)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-h}^{+h} V_2(a+h, b+t)\,\mathrm{d}t$$

$\mathbf{V}$ は一般だからこれ以上計算できないな〜

$\boxed{}$ ことを使おう!

復習

2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y) = (a,b)$ における 1 次のテイラー展開

$$f(a+h, b+t) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}$$

$V_2 = f$ と思って,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h}^{+h} +V_2(a+h, b+t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-h}^{+h} + \left(V_2(a,b)+h\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + t\frac{\partial V_2}{\partial y}(a,b) + \text{ちょっと}\right)\mathrm{d}t \\ &= +\left[V_2(a,b)t+h\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b)t + \text{偶関数} + \text{ちょっと}\right]_{-h}^{+h} \\ &= +2h\cdot V_2(a,b)+2h^2\cdot\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + 0 + \text{ちょっと}. \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{-h}^{+h} -V_2(a-h, b-t)\,\mathrm{dt} = -(2h \cdot V_2(a,b) - 2h^2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) + \text{ち})$$

$$I_4 = \int_{-h}^{+h} +V_1(a+t, b-h)\,\mathrm{dt} = +(2h \cdot V_1(a,b) - 2h^2 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ち})$$

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} -V_1(a-t, b+h)\,\mathrm{dt} = -(2h \cdot V_1(a,b) + 2h^2 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b) + \text{ち})$$

$$\begin{aligned} I =& I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ =& (2h)^2 (\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)) + \text{ちょっと} \\ \simeq& (\text{正方形の面積}) \times (\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b)) + \text{ちょっと} \end{aligned}$$

結局, D を正方形領域とすると, 面積分 $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}S$ を使って,

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_D (\frac{\partial V_2}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(a,b))\mathrm{d}S$$

小高 式 (6.12)

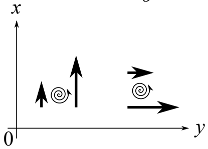
渦度の定義

ベクトル場 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ の $\boxed{\text{渦度}}$ とは

$$(\nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{\partial V_2}{\partial x}(\mathbf{r}) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(\mathbf{r}).$$

左辺はひとかたまりで渦度を表す記号．括弧など省略不可．
渦度は点 $\mathbf{r}$ での左巻き渦の程度 (右巻きなら負) を表す 小高 §6.2

渦度が正の状況
$\frac{\partial V_2}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial V_1}{\partial y} < 0$



ベクトル場の渦度の例 小高 p.130, 図 6.8

実は小さい正方形領域ばかりでなく，どんな領域 D でも成立する．

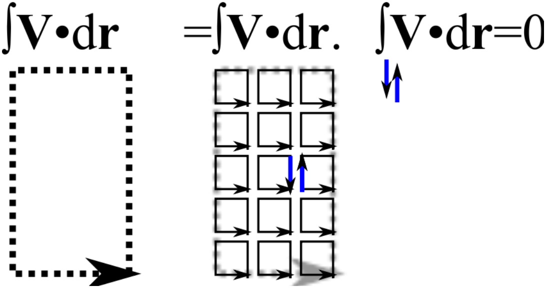
グリーンの定理

D: 平面の領域．$\mathbf{V}$: ベクトル場．

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{V})_z \mathrm{d}S.$$

意味: 流れるプールの縁の勢い=プール内の渦の合計 小高 式 (8.6)

証明 小高 p.175



重積分の復習

D が $x = a_1, x = a_2$, $y = \phi_1(x)$,$y = \phi_2(x)$ に囲まれた領域のとき,
$f(x, y)$ の重積分は 小高 §4.1,§4.2

$$\int_D f(x, y)\, \mathrm{d}S = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

問題 (面積分)

$(0, 0), (1, 0), (1, \sqrt{3})$ を 3 頂点とする直角三角形領域 R で,
$f(\mathbf{r}) = x^2 y + y^3$ を面積分しよう.

問題 (グリーンの定理)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (xy + y, 2xy)$ と, 平面の領域 D を考える. ただし, D は $(0,0), (1,0), (1,2)$ を 3 頂点とする三角形の内部.

1. 渦度 $(\nabla \times \mathbf{V})_z$ を求めよう.
2. 面積分 $\displaystyle\int_D (\nabla \times \mathbf{V})_z \mathrm{d}S$ を求めよう.
3. 線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ を素直に求めよう.

問題 (グリーンの定理)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (y^2, x)$ を考える. 曲線 C を, 原点を中心とする半径 2 の円周とする (左回り. どこを始点終点と思ってもいいけど例えば $(2,0)$ が始点で終点). 線積分 (マーク 1) $\displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ をグリーンの定理を使って面積分に直して計算しよう.

連絡

- プチテストはそのうち返却
- 来週から quiz 再開
- 大注意: 予習復習問題の締切を 1 日早めます. 月曜 26:00=火曜 02:00 が締切. その後に正解をチェックしてから quiz に参加できるでしょ.

教科書のお奨め問題

教科書では $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V})_z$ のことを $[\nabla\mathbf{V}]$ と書いています.

- 閉曲線に沿った線積分 小高 問題 [6.31]
- 渦度 小高 問題 6.16(p.135), 章末問題 [6.5](p.149)
- グリーンの定理 小高 問題 8.6,7(p.178)