線積分マーク 2

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析 ∇ L09(2011-06-22 Wed)

更新:Time-stamp: "2011-06-28 Tue 20:37 JST hig"

今日の目標

1. 線積分マーク 2 の計算ができる.
2. 線積分マーク 2 のイメージが語れる.

http://hig3.net

略解 (ベクトル場の閉曲線に沿った線積分)

1. $I = 0.$
2. $I = 2\pi.$

略解 (面積分)

$$
\begin{aligned}
\int_R f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{3}\,x} (x^2 y + y^3)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [\tfrac{1}{2}x^2 y^2 + \tfrac{1}{4}y^4]_{y=0}^{y=\sqrt{3}\,x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\tfrac{3}{2}x^2 x^2 + \tfrac{9}{4}x^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{15}{4}[\tfrac{1}{5}x^5]_0^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

略解 (グリーンの定理)

1. 渦度 $(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V})_z = 2y - x - 1$.
2. $\int_D (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V})_z \, \mathrm{d}S$ は,
$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} (2y - x - 1)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 - 2x)\, \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}.$$
または $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{1} (2y - x - 1)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\tfrac{1}{3}$.
3. 曲線 ∂D を 3 個の線分に分けて計算する. $(0,0)$ と $(1,0)$ を結ぶ線分を $C_1 : \mathbf{r}(t) = (1,0)t$ $(0 \le t \le 1)$, $(1,0)$ と $(1,2)$ を結ぶ線分を $C_2 : \mathbf{r}(t) = (1,t)$ $(0 \le t \le 2)$, $(1,2)$ と $(0,0)$ を結ぶ線分を $C_3 : \mathbf{r}(t) = -(1,2)t$ $(-1 \le t \le 0)$ とすると,
$$\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0, \quad \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 4, \quad \int_{C_3} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\tfrac{13}{3}.$$
よって, $\displaystyle\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\tfrac{1}{3}$ であり, グリーンの定理が確かめられる.

略解 (グリーンの定理)

$\mathbf{V}$ の渦度は $(\nabla \times \mathbf{V})_z = 1 - 2y$.
原点を中心とする半径 2 の円板を D とすると, $C = \partial D$. グリーンの定理を用い, D が x 軸に関して対称であることに注意すると, $\int_D y \, \mathrm{d}S = 0$. また, $\int_D 1 \, \mathrm{d}S$ は領域 D の面積に等しいので,

$$\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_D (\nabla \times \mathbf{V})_z \, \mathrm{d}S = \int_D (1 - 2y) \, \mathrm{d}S = \int_D 1 \, \mathrm{d}S = \pi \cdot 2^2 \times 1.$$

グリーンの定理の鑑賞: 渦なし条件との関係

渦なしなら, 閉曲線 C に対し $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

渦なしでなければ, $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \neq 0$ となる閉曲線 C がある. (対偶は?)

渦なし条件を満たすベクトル場の線積分は, 始点, 終点だけで決まる

別証明.

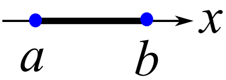
$\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, つまり, $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ を示せばよい.

グリーンの定理より,

グリーンの定理の鑑賞:'定積分は原始関数の差' と似てない?

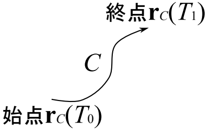
$$\int_{[a,b]} F'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{x\in\partial[a,b]} \pm F(x) = F(b) - F(a)$$

1 次元の積分 =その境界の 0 次元の積分



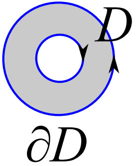
$$\int_C (\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}))\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(T_{終})) - f(\mathbf{r}(T_{始}))$$

1 次元の積分 =その境界の 0 次元の積分



$$\int_D (\boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{V})_z\,\mathrm{d}S = \int_{\partial D} \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

2 次元の積分 =その境界の 1 次元の積分



登場人物と先週までのあらすじ

$f(\mathbf{r})$:スカラー場, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:ベクトル場,
曲線 C のパラメタ表示 $\mathbf{r}(t)$ $(T_0 \leq t \leq T_1)$.

スカラー場の線積分 (マーク 0)

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1} f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) \right| \, \mathrm{d}t$$

ベクトル場の線積分 (マーク 1)

$$\int_C (\mathbf{V} \cdot \mathbf{t}) \, \mathrm{d}s = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) \, \mathrm{d}t$$

$\mathbf{t}$: 単位接線ベクトル

ベクトル場の線積分 (マーク 2)

$$\int_C \boxed{} \, \mathrm{d}s$$

$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ の曲線に沿った線積分 (線積分マーク 2)

C: パラメタ表示 $\mathbf{r}(t)$ $(T_0 \leq t \leq T_1)$ を持つ曲線.
$\mathbf{n}(t)$: $\mathbf{r}(t)$ における単位法線ベクトル (向きはどちらか指定).
$\boxed{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n} \text{ の曲線 } C \text{ に沿った線積分}}$ (線積分マーク 2) とは, スカラー場 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ の C 上の線積分

$$\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1} \left(\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{n}(t)\right)\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|\mathrm{d}t$$

のこと.

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{|\mathbf{N}(t)|}\mathbf{N}(t) = \pm\frac{1}{|\mathbf{N}(t)|}(-\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), +\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t))$$

$$|\mathbf{N}| = |\tfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}|$$

に注意すると, $|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}|$ が約分できて,

線積分マーク 2 の楽な計算法

$$\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{T_0}^{T_1}\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{N}(t)\,\mathrm{d}t$$

ただし,

$$\mathbf{N}(t) = \pm\left(-\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), +\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)$$

大注意: 符号は, $\boxed{\qquad\qquad}$ を図や問題文の日本語から自分で判断してつける.

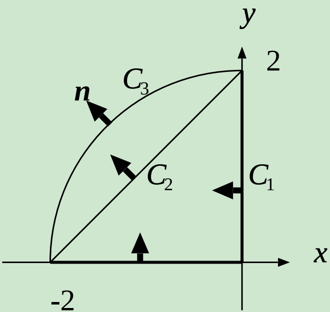
要するに, マーク 1 の式の $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ のところを $\pm\frac{1}{2}\pi$ まわしただけ.

問題 (線積分 (マーク 2))

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (2x, x+3y)$ を考える. 図の

1. 折れ線 C_1
2. 直線 C_2
3. 円弧 C_3

について, 線積分 (マーク 2) $\displaystyle\int_{C_i} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$ を求めよう. ただし $\mathbf{n}$ は図の向きの単位法線ベクトルとする.



問題 (ベクトル場の線積分マーク 2)

D を中心原点, 半径 3 の円板とする. 境界 ∂D の外向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする.
ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (x + 2y, -3x + 4y)$ に対して, 線積分 (マーク 2)
$\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s$ を求めよう.

線積分マーク 2 の意味

$\mathbf{V}(\mathbf{r})$: 風 or 水の流れ, C:

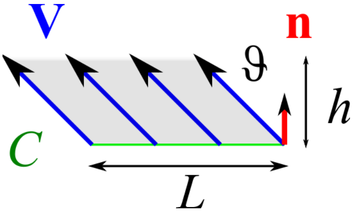
線積分マーク 2 の意味

$\int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$ は, $\mathbf{n}$ の向きに C を通過する水の量 (1 秒あたり)

簡単な場合で考えよう. 曲線 C の小さい一部分を見れば, C は直線, $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ の流れも一定.

通過した水の体積 (/深さ)
=平行四辺形の面積

$$= L \times h$$
$$= L \times |\mathbf{V}| \cos\theta$$
$$= L \times |\mathbf{V}||\mathbf{n}| \cos\theta$$
$$= L \times \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$$
$$= \int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$



問題 (流出量)

$\mathbf{V}$ が水の流れだと思おう．次の流れは，単位円板 D から流れ出しているか，流れ込んでいるか．できれば線積分マーク 2 を具体的に計算せずに答えよう．

1. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y)$
2. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (3, 5)$
3. $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (3x, 0)$

連絡

- 大注意: 前回から予習復習問題の締切を 1 日早めてます．月曜 26:00=火曜 02:00 が締切．その後に正解をチェックしてから quiz に参加できるでしょ．

教科書のお奨め問題

- ベクトル場の線積分 (マーク 2) 小高 あまり書いてない．問題 6.8(p.128)