曲面のパラメタ表示と接線ベクトル

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L11(2011-07-06 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-07-06 Wed 13:08 JST hig"

今日の目標

1. 曲面の接線ベクトル, 接線, 接平面が求められる.
2. 曲面のパラメタ表示と方程式の間での書き換えができる.

http://hig3.net

略解 (ガウスの発散定理)

1. $\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2y)}{\partial y} = y^2 + 2.$
2. $\nabla \cdot \mathbf{V} = 4y.$ よって,

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{V}\, \mathrm{d}S = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} 4y\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \left[2y^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} 2(4 - x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{64}{3}.$$

3. C_1 のパラメタ表示として $\mathbf{r}(t)=(t,0)$ $(-2\le t\le 2)$ をとる. $\mathbf{n}$ と同じ向きの法線ベクトルは $-R_{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)=(0,-1)$. よって

$$I_1=\int_{-2}^{2}(0,2\cdot 0^2-3)\cdot(0,-1)\,\mathrm{d}t=12.$$

C_2 のパラメタ表示として $\mathbf{r}(t)=(2\cos t,2\sin t)$ $(0\le t\le\pi)$ をとる. $\mathbf{n}$ と同じ向きの法線ベクトルは $-R_{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)=(2\cos t,2\sin t)$. よって

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\pi}(0,8\sin^2 t-3)\cdot(2\cos t,2\sin t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi}(5-8\cos^2 t)(2\sin t)\,\mathrm{d}t\\&=\left[-10\cos t+\frac{16}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}\\&=\frac{28}{3}.\end{aligned}$$

なお, パラメタ表示として $\mathbf{r}(t)=(t,\sqrt{4-t^2})$ $(-2\le t\le +2)$ などを取ることも可能. 計算は同程度,

略解 (線積分マーク 2)

斜辺 C からののみ寄与がある. パラメタ表示を $\mathbf{r}(t) = (0,2) + (1,-1)t$ $(0 \le t \le 2)$ とすると, 外向き法線ベクトルは $N(t) = (1,1)$. よって, ガウスの発散定理により,

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{V} \mathrm{d}S = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_0^2 t(2-t)(2^3, \mathrm{e}^{2^2}) \cdot (1,1) \, \mathrm{d}t = (8+\mathrm{e}^4)(4-\tfrac{8}{3}).$$

略解 (ガウスの発散定理)

1. $\nabla \cdot \mathbf{V} = 5$. C_3 と C_4 に囲まれる領域を D とすると, ガウスの発散定理により,

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \int_D \nabla \cdot \mathbf{V} \, \mathrm{d}S = 5 \times (D \text{ の面積}) = 5(\pi - 2).$$

2. C_3 のパラメタ表示を $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $(-\frac{1}{2}\pi \le t \le 0)$ とすると, 法線ベクトルは $\mathbf{N}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$.

$$\int_{C_3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\,\mathrm{d}t = 5\pi + 2.$$

C_4 のパラメタ表示を $\mathbf{r}(t) = (0, -2) + (1, 1)t$ $(0 \le t \le 2)$ とすると, 法線ベクトルは $\mathbf{N}(t) = (-1, 1)$.

$$\int_{C_4} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{1} \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\,\mathrm{d}t = -12.$$

ベクトル場の発散 $\nabla \cdot \mathbf{V}$

小林-高橋, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003) p.130, 図 6.8 より引用

ガウスの発散定理: 発散ゼロ (=divergence-free) 条件

すべての閉曲線 C に対し $\int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0$ であるための必要十分条件は, (すべての点で)$\mathbf{V}$ の発散が 0 であること.

発散が 0 であるベクトル場の線積分マーク 2 は, C の端点と $\mathbf{n}$ の向きだけで決まる

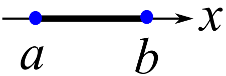
証明

$$\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s,\ \text{つまり},\ \int_{C_1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s - \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = 0$$

を示せばよい. ガウスの発散定理より,

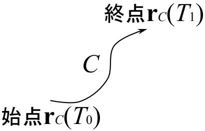
ガウスの発散定理の鑑賞:積分公式の一例

$$\int_{[a,b]} F'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{x\in\partial[a,b]} \pm F(x) = F(b) - F(a)$$



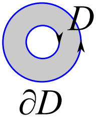
1 次元の積分 =その境界の 0 次元の積分

$$\int_C (\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}))\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(T_{終})) - f(\mathbf{r}(T_{始}))$$



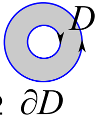
勾配の 1 次元の積分 =その境界点 (0 次元) 上の積分

$$\int_D (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V})_z\,\mathrm{d}S = \int_{\partial D} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$



渦度の 2 次元の積分 =その境界の曲線に沿った線積分マーク 1

$$\int_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}\mathrm{d}S = \int_{\partial D} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$



発散の 2 次元の積分 =その境界の曲線に沿った線積分マーク 2

3 次元の曲線のパラメタ表示

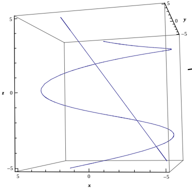
- 3 次元の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- 3 次元ベクトル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$
- 内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \boxed{}$. 2 次元と同じ
- 絶対値 $|\mathbf{A}| = \boxed{}$. 2 次元と同じ

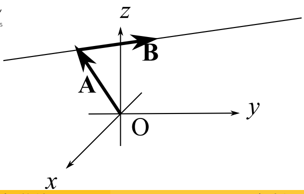
3 次元の曲線のパラメタ表示 $\boxed{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))}$ 小高 p.61

例 1 $\mathbf{r}_1(t) = (5\cos t, 5\sin t, t)$.

例 2 $\mathbf{r}_2(t) = (1 + 3t, 2 + 4t, 3 + 5t)$.

3 次元の直線 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}t$. 2 次元と同じ





3 次元の曲線の接線ベクトル $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$. 2 次元と同じ

3 次元の曲線の接線 $\mathbf{r}_{\text{接線}}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)(t - t_0)$. 2 次元と同じ

3 次元曲線の法線 待て微分幾何

問題 (3 次元曲線の接線)

曲線 $\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, t)$ の, $\mathbf{r}(t_0) = (-5, 0, \pi)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.

曲面の方程式

3 次元のスカラー場 $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z)$.
例 $f(\mathbf{r}) = x + 2y + 3z + 4$, $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2 - 9$.

曲面の方程式

$f(\mathbf{r}) = 0$.

例 $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 3^2 = 0$ $\boxed{}$

例 $f(\mathbf{r}) = z - 2 = 0$ $\boxed{}$ を通り, $\boxed{}$ 平面に平行な平面

例 $f(\mathbf{r}) = x + 2y + 3z + 4 = 0$ ある平面 待て次週

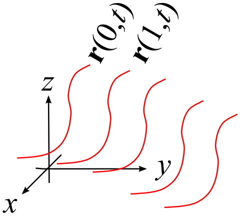
平面の方程式

$f(\mathbf{r})$ が, x, y, z の 1 次式であるとき, 方程式 $f(\mathbf{r}) = 0$ は平面を表す.

曲面のパラメタ表示

曲線のグループ

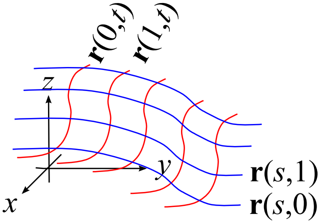
$\mathbf{r}_1(t) = (t^2, 2t+1, 2t)$,
$\mathbf{r}_2(t) = (t^2, 2t+2, 2t)$,
$\mathbf{r}_3(t) = (t^2, 2t+3, 2t)$,
$\vdots$
$\mathbf{r}_s(t) \rightsquigarrow \mathbf{r}(s,t) = (t^2, 2t+s, 2t)$.



曲面のパラメタ表示

s, t をパラメタとする曲面のパラメタ表示

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$



$\mathbf{r}(s,1), \mathbf{r}(s,2), \mathbf{r}(s,3), \ldots$ も曲線のグループ.

平面のパラメタ表示

パラメタ表示

$$\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{A} + \mathbf{B}s + \mathbf{C}t$$

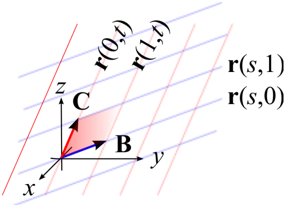
(s,t についての 1 次式) は, ($\mathbf{A}$ を通る) 平面を表す.

説明 1

s を止めれば直線 $\mathbf{r}(s_0,t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}s_0) + \mathbf{C}t$ (パラメタは t)

t を止めれば直線 $\mathbf{r}(s,t_0) = (\mathbf{A} + \mathbf{C}t_0) + \mathbf{B}s$ (パラメタは s)

説明 2 簡単のため $\mathbf{A} = 0$.



方程式とパラメタ表示の間の書き換え

問題 (方程式とパラメタ表示)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t) = (1,0,3) + (1,0,1)s + (0,2,1)t$ の方程式を求めよう.

問題 (方程式とパラメタ表示)

方程式 $3x + 2y + z + 6 = 0$ で表される曲面のパラメタ表示をひとつ作ろう.

接平面

$\mathbf{r}_{s_0}(t) = \mathbf{r}(s_0, t)$ は t をパラメタとする曲線のパラメタ表示.

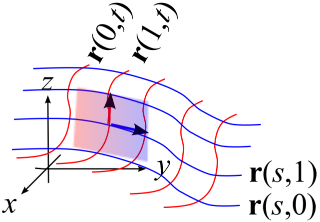
その曲線の $t = t_0$ における 接線ベクトルは

$\mathbf{r}_{t_0}(s) = \mathbf{r}(s, t_0)$ は s をパラメタとする曲線のパラメタ表示.

その曲線の $s = s_0$ における 接線ベクトルは

点 $\mathbf{r}(s_0, t_0)$ における曲面の接線ベクトルは, この線形結合でかける.

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0, t_0)t + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0, t_0)s$



曲面の接平面のパラメタ表示

曲面 $\mathbf{r}(s,t)$ 上の点 $\mathbf{r}(s_0,t_0)$ における $\boxed{\text{接平面}}$ のパラメタ表示は,

$$\mathbf{r}_{\text{接平面}}(s,t) = \mathbf{r}(s_0,t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s_0,t_0)(s-s_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s_0,t_0)(t-t_0).$$

復習

2 変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における 1 次のテイラー展開

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b).$$

問題 (接平面)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t) = (s+2t, t+t^3, s^3+st)$ の, $\mathbf{r}(1,2) = (5,10,3)$ における接平面のパラメタ表示を求めよう.

問題 (接平面)

パラメタ表示された曲面 $\mathbf{r}(s,t) = (2\sin t\cos s, 2\sin t\sin s, 4\cos t)$ $(0 \le t \le \pi, 0 \le s < 2\pi)$ の, $\mathbf{r}(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$ における接平面のパラメタ表示を求めよう.

連絡

予習復習問題

- 大注意: 前々回から予習復習問題の締切を 1 日早めてます. 月曜 26:00=火曜 02:00 が締切. その後に正解をチェックしてから quiz に参加できるでしょ.

教科書のお奨め問題

- 3 次元空間内の曲線のパラメタ表示 小高 問題 2.45(p.62)
- 3 次元の接線ベクトルと線積分マーク 1 小高 章末問題 [2.9](p.65)
- 3 次元空間内の曲面のパラメタ表示 小高 問題 2.46(p.63), 章末問題 [2.9](p.65)