3 次元のガウスの発散定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L14(2011-07-27 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-07-27 Wed 07:22 JST hig"

今日の目標

1. 曲面上の $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ の面積分を楽に計算できる.
2. 3 次元のガウスの発散定理の意味を説明できる.
3. 体積分を計算できる.

http://hig3.net

略解 (曲面の接平面)

スカラー場 $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ の等高面．よって法線ベクトルは $\mathbf{N} = \nabla f = (2x, 2y, 2z)$.
方程式は $(1, -1, -1) \cdot (x - 1, y + 1, z + 1) = 0$. すなわち
$x - y - z - 3 = 0$.

略解 (3 次元の保存的ベクトル場)

1. $\nabla \times \mathbf{V} = \cdots$(略)$\cdots = \mathbf{0}$. 3 次元の渦なし条件を満たす．よって保存的である.
2. 原点と定点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を結ぶ線分 C のパラメタ表示は
$\mathbf{r}(t) = (x, y, z)t$. パラメタ $0 \leq t \leq 1$, x, y, z は定数.
ポテンシャルは,

$$f(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{V}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = x^2 + y^2 + z^2$$

p.14(1)

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) = (0, -t\sin s, t\cos s)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) = (-2, \cos s, \sin s)$ より,

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right| = |(-t, -2t\cos s, -2t\sin s)| = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}\cdot t$$

面積は

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}s \int_1^3 \mathrm{d}t\ \sqrt{5}t = 8\sqrt{5}\pi.$$

曲面上の面積分

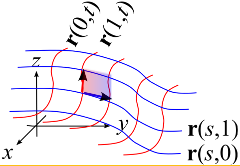
曲面上のスカラー場の面積分の公式 小高 p.98

$$\int_S f \, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; f(\mathbf{r}(s,t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right|$$

特に $f(\mathbf{r}) = 1$ のとき,

曲面の面積の公式 小高 p.95

$$\boxed{\phantom{\text{面積}}} = \int_S 1 \, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t \; \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right|$$



特に $f(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S \\
&= \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t\, \mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right|} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\right|
\end{aligned}$$

曲面上の $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分の公式

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \int_{S_0}^{S_1} \mathrm{d}s \int_{T_0}^{T_1} \mathrm{d}t\, \mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right)$$

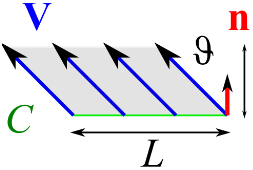
小高 p.99

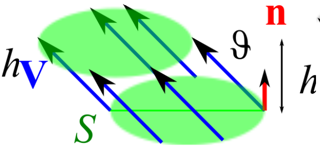
曲面上の面積分 $\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ の意味

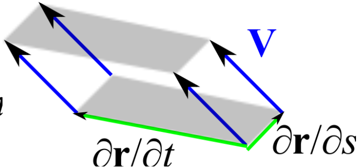
解釈 1: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分は, $\mathbf{V}$ が水の流れとしたとき, $\mathbf{V}$ が $\mathbf{n}$ の向きに S を通過する水の量.

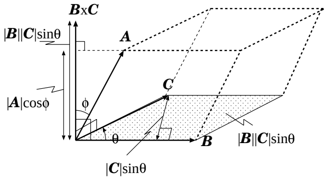
解釈 2: $\mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t))$ は $\Delta s \times \Delta t$ 部分で単位時間に面を通過する水の平行六面体の体積.

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ は, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ のはる平行六面体の体積. 縦ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を並べて書いた 3×3 行列の行列式に等しい.









問題 (3 次元のガウスの発散定理)

ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 0, z^3)$ を考える.

1. 曲面 S を $z = 0$ $(x^2 + y^2 \leq 4)$ とする. 面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$ を求めよう. ただし, $\mathbf{n}$ は z 成分が負の単位法線ベクトル.
2. 曲面 S を $z = 4 - x^2 - y^2$ $(x^2 + y^2 \leq 4)$ とする. 面積分 $\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$ を求めよう. ただし, $\mathbf{n}$ は z 成分が正の単位法線ベクトル.

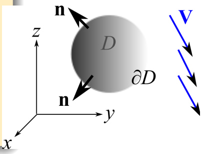
3 次元のガウスの発散定理

3 次元のガウスの発散定理 小高 p.179

D:3 次元の領域. ∂D:D の境界の閉曲面. $\mathbf{n}$: ∂D の外向き単位法線ベクトル. $\mathbf{V}$:3 次元のベクトル場.

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \int_D (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V})\, \mathrm{d}V$$

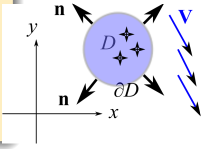
意味: 漁網から出て行く水=漁網内のわき水 − 水漏れ



比較:2 次元のガウスの発散定理 小高 p.173

D: 平面の領域. $\mathbf{n}$: ∂D の外向き単位法線ベクトル. $\mathbf{V}$: ベクトル場.

$$\int_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \int_D (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}) \mathrm{d}S.$$



(3 次元の) 発散

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (V_1, V_2, V_3) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$

スカラー場の体積分

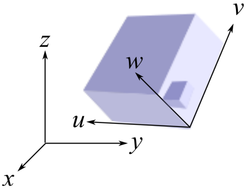
$$\int_D f \, \mathrm{d}V$$

例

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_2^3 \mathrm{d}y \int_4^5 \mathrm{d}z \, (x + 2y^3 + 4z^5)^2$$

3 次元の領域のパラメタ表示

$X_0 \le x \le X_1$, $Y_0 \le y \le Y_1$, $Z_0 \le z \le Z_1$ は $\boxed{}$ 領域.
パラメタ表示.
$\mathbf{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.
u, v, w がある範囲の値を取るとき, (ふつうは) 平行 6 面体みたいな形の領域を表す.



例.
$\boxed{}$ 座標 $\mathbf{r}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
$0 \le r \le 2, 0 \le \theta < 2\pi, -2 \le z \le 3$
$\boxed{}$

体積分の変数変換

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

$\left|\det\left(\vdots\vdots\vdots\right)\right|$ はヤコビアン. u, v, w を 1 ずつ変えたときにできる $\boxed{}$. 小高 5 章

問題 (3 次元のガウスの発散定理)

領域 D のパラメタ表示を $\mathbf{r}(r, \theta, u) = (r\cos\theta, r\sin\theta, u)$
$(0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi, , 0 \leq u \leq 4 - r^2$ とする.

1. ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 0, z^3)$ に対して, 面積分 $\displaystyle\int_{\partial D} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ を, ガウスの発散定理を用いて体積分に書き直して求めよう.
2. 閉曲面 ∂D の方程式またはパラメタ表示を求めよう.

境界を求めよう!

曲面の境界の曲線

曲面 $\mathbf{r}(s,t)=(s,t,0) \quad (0\le s\le 2, 0\le t\le 3)$

s,t のひとつを端に持って行くと境界の曲線になる

- $s=0 \rightsquigarrow \mathbf{r}(t)=(0,t,0)$
- $s=2 \rightsquigarrow \mathbf{r}(t)=(2,t,0)$
- $t=0 \rightsquigarrow \mathbf{r}(s)=(s,0,0)$
- $t=3 \rightsquigarrow \mathbf{r}(s)=(s,3,0)$

曲面 $\mathbf{r}(s,t)=(s\cos t, s\sin t, 0) \quad (0\le s\le 2, 0\le t< 2\pi)$

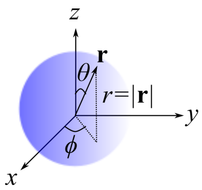
- $s=2 \rightsquigarrow \mathbf{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 0)$.
- $s=0, t=0, t=2\pi \rightsquigarrow$ 特殊事情から境界ではない.

領域の境界の曲面

球の内部 $\mathbf{r}(r,\theta,\phi)=(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \quad (0\le r\le 2, 0\le \theta\le\pi, 0\le\phi<2\pi)$

- $r=2 \rightsquigarrow$ 球面 $\mathbf{r}(\theta,\phi)=(2\sin\theta\cos\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\theta)$
- $r=0, \theta=0,\pi, \phi=0,2\pi \rightsquigarrow$ 特殊事情から境界ではない.

球座標



$(u, v, w) = (r, \theta, \phi)$. 小高 p.48,110

r:原点からの距離 $|\mathbf{r}|$.

θ: 緯度 (南緯 $-\frac{\pi}{2}$)

ϕ: 経度 (東経 $+\pi$)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(r, \theta, \phi) &= (x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)) \\ &= (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) \quad (0 \le r, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi\end{aligned}$$

球座標のヤコビアン

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

問題 (曲面上の面積分)

曲面 S を原点を中心とする半径 3 の球面とする．曲面 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を外向きにとる．ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 0, z^3)$ を考える．球座標を用いて，$\displaystyle\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ を求めよう．

問題 (体積分)

領域 D を原点を中心とする半径 3 の球の内部とする．ベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = (0, 0, z^3)$ を考える．

1. ベクトル場の発散 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}$ を求めよう．
2. 球座標を用いて，$\displaystyle\int_D (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V})\mathrm{d}V$ を求めよう．

連絡

予習復習問題

- 今回の予習復習問題の締切は 2011-08-01 月夜

模範解答を作ろうプロジェクト!

で最大 10 ピーナッツゲット!

教科書のお奨め問題

- $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分 小高　問題 4.15(p.103), 章末問題 [4.7](4)(p.105), [4.8](p.106)
- 3 次元領域のパラメタ表示と体積分
  小高 問題 5.1–6(p.109–114), 章末問題 [5.1]–[5.5](p.114–115)
- 球座標 小高 問題 2.18(p.49), 問題 2.19(p.49)

ファイナルトライアル出題計画

外部記憶ペーパーを使用可能 (別紙).

- ベクトル場の線積分マーク 1(再出題)
- ベクトル場の線積分マーク 2
- グリーンの定理を利用した, 線積分マーク 1, 面積分の計算
- 2,3 次元のベクトル場スカラー場と ∇, 勾配, 発散, 回転, 3 次元の保存場.
- 2 次元のガウスの発散定理を利用した, 線積分マーク 2, 面積分の計算
- 曲面の接平面のパラメタ表示と方程式
- 曲面の法線ベクトル
- 曲面の面積
- 曲面上の $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分
- 3 次元の領域での体積分
- 3 次元のガウスの発散定理を利用した, 体積分, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ の面積分の計算