3 次元のガウスの発散定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

ベクトル解析∇ L14(2011-07-27 Wed)
更新:Time-stamp: "2011-07-27 Wed 11:53 JST hig"

今日の目標

1.
2.
3.

http://hig3.net

略解 (曲面上の $V \cdot n$ の面積分)

1. 0.
2. 曲面のパラメタ表示として $\mathbf{r}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 4-s^2)$ $(0 \le s < 2, 0 \le t < 2\pi)$ をとることができる.
$\mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) = (0, 0, (4-s^2)^3)$.
$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) = (\cos t, \sin t, -2s)$. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) = (-s\sin t, s\cos t, 0)$.
$\mathbf{N} = \pm\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = ($何か$,$ 何か$, \pm s)$. $\mathbf{N}$ の向きの指定と s の範囲を考えて, $\mathbf{N} = ($何か$,$ 何か$, +s)$.
よって面積分は,

$$\int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S$$
$$= \int_0^2 \mathrm{d}s \int_0^{2\pi} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right)$$
$$= 2\pi \int_0^2 s(4-s^2)^3 = 64\pi$$

略解 (3 次元のガウスの発散定理)

1. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 3z^2$.
   ヤコビアンの絶対値は $\mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}\int_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} \, \mathrm{d}V = &\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{4-r^2} \mathrm{d}w \; 3w^2 \\ =&2\pi \int_0^2 \mathrm{d}r [w^3]_0^{4-r^2} \\ =&2\pi \int_0^2 \mathrm{d}r (4-r^2)^3 = 64\pi.\end{aligned}$$

2. 前の問の 2 つの曲面をあわせたもの.