ベクトル解析∇ Quizzes

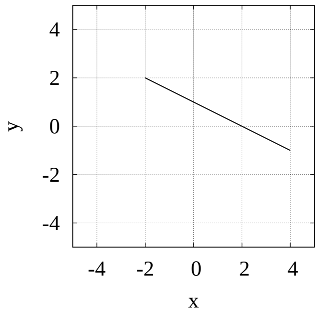
樋口さぶろお[1] 更新: Time-stamp: ”2011-07-27 Wed 11:32 JST hig”

1

1 回めは Quiz なし. かわりに?プレテスト

2

1. 下の図の線分のパラメタ表示をひとつ求めよう.



2. 次のパラメタ表示で表される曲線を描こう (端点の座標や補助線などを明示しよう)

$$\boldsymbol{r}(t) = (3 + 4\cos t, -1 + 4\sin t) \quad (\tfrac{1}{6}\pi \le t \le \tfrac{2}{3}\pi)$$

3

曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 3t, 2t + 3)$ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{r} = (-2, 5)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{r} = (-2, 5)$ における単位法線ベクトルを求めよう.

4

位置 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ の山の高さは

$$f(\boldsymbol{r}) = 500 - 2x^2 - y^4 + 8y^2.$$

時刻 t のペンギンの位置は

$$\boldsymbol{r}(t) = (t^2 - 2t, t).$$

1. 時刻 $t = -3$ の, ペンギンの高さは?
2. ペンギンが通る, いちばん高い地点と通過時刻は?

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここから), へや:1 号館 5 階 502.

5

$z=0$ と曲面 $f(\boldsymbol{r})=4xy+y^2$ にはさまれる立体の, 曲線 C: $\boldsymbol{r}(t)=(3t^2,4t^2)$ $(-\frac{1}{2}\leq t\leq 0)$ に沿った切り口の面積を求めよう.

6

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(3xy,4x^2)$, 曲線 C: $\boldsymbol{r}(t)=(2\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{2t})$ $(0\leq t\leq 3)$ を考える. 始点を $\boldsymbol{r}(0)$, 終点を $\boldsymbol{r}(3)$ とする.

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の曲線 C に沿った線積分を求めよう.

$$\begin{aligned}
&\int_C \boldsymbol{V}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
=&\int_0^3 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^3 (3\cdot 2\mathrm{e}^t\cdot\mathrm{e}^{2t},4\cdot(2\mathrm{e}^t)^2)\cdot(2\mathrm{e}^t,2\mathrm{e}^{2t})\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^3 44\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t\\
=&[11\mathrm{e}^{4t}]_0^3=11(\mathrm{e}^{12}-1).
\end{aligned}$$

7

7.1

1. 一般にスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ の勾配を表す数式 (記号) を書こう.
2. スカラー場 $f(\boldsymbol{r})=xy^3+\mathrm{e}^{-2y}+3$ の勾配を求めよう.

7.2

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(\mathrm{e}^{x-2y}+1,-2\mathrm{e}^{x-2y})$ はポテンシャル $f(\boldsymbol{r})=\mathrm{e}^{x-2y}+x$ を持つ. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう. 曲線 C は, $\boldsymbol{r}(t)=(t,t^2)$ $(0\leq t\leq 2)$. 始点 $\boldsymbol{r}(2)=(2,4)$, 終点 $\boldsymbol{r}(0)=(0,0)$.

プチテスト

プチテストの回は Quiz なし

8

プチテストの次の回は Quiz なし.

9

$(0,0),(2,1),(2,3)$ を 3 頂点とする三角形領域を R とする.
ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(-3y^2,2x)$, スカラー場 $f(\boldsymbol{r})=A+6By$ を考える $(A,B$ は定数$)$

1. 面積分 $\displaystyle\int_R f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}S$ を求めよう.
2. $\boldsymbol{V}$ の渦度を求めよう.
3. グリーンの定理を利用して, ベクトル場の線積分 $\displaystyle\int_{\partial R}\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を求めよう.

10

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(-3,-1)$ の, 曲線 $C:\boldsymbol{r}(t)=(t,t^4)$ $(-2\leq t\leq -1)$ に沿った線積分マーク 2 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ を求めよう.
ただし, $\boldsymbol{n}$ は x 成分が負の単位法線ベクトル.

11

11.1

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=(xy^2+y^2,x^4y+y^3)$, スカラー場 $f(\boldsymbol{r})=3x^2+x^2y^2$ を考える.
ベクトル場, スカラー場の勾配, 渦度, 発散 (のうち実在するものだけ) を求めよう
(どれがどれか区別できるように答えてね)

11.2

4 頂点 $(0,0),(0,-1),(-2,-3),(-2,0)$ で指定される台形の内部の領域 D で, $f(\boldsymbol{r})=12x^2$ を面積分しよう.

12

12.1

パラメタ表示された (3 次元の) 曲線 $\boldsymbol{r}(t)=(t^2,t^2-3t,\mathrm{e}^{2t+4})$ の, $\boldsymbol{r}_0=(4,10,1)$ における接線のパラメタ表示を求めよう.

12.2

平面 $x+3y+2z=-12$ のパラメタ表示を求めよう.

13

曲面 $\boldsymbol{r}(s,t) = (st^2, s^2+t, 4t^2-s)$ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{r}(1,1) = (1,2,3)$ における接平面のパラメタ表示を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{r}(1,1) = (1,2,3)$ における法線ベクトルを求め, それを利用して接平面の方程式を求めよう.

14

パラメタ表示
$\boldsymbol{r}(s,t) = (5\cos 2t, 5\sin 2t, s)$
$(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi, -3 \leq s \leq 3)$
で与えられる曲面 S の面積を求めよう.