量子力学 I 演習 問題 (第 1 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 10 月 16 日

はじめに

予備知識　この演習では, 講義 量子力学 I (櫻井先生) の進度に同期して問題を解きます. したがって, 量子力学 I の講義を受講せず, この演習だけを受講する場合には, 相当する内容を各自で学習して下さい.

教科書　特にありません. 問題のプリントを配布します.

評価　出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

通知　この演習に関する通知は, 4 号館 413B 号室の前の壁, および

URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1/`

で行ないます. 必ずしも 学科の掲示板は用いないので注意.

演習の進め方　未定ですが, たぶん, 直前の櫻井先生の授業で出された問題を解いてくるか, その場で解く, また, その場で出された問題をその場で解く, 問題や重要事項の解説をする, などといった感じになると思います. 櫻井先生の授業での指示に従って下さい.

今回と最初のうちは, 振動波動や線型代数などの復習をして, 必ずしも上のようにはならないかもしれません.

---

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

授業時間内に問題を問題を解いたレポート用紙など (A4だと助かる) を提出して下さい. これで出席とします. たくさん解けなかった場合でも, 授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい.

ベクトルの空間の内積

関数空間の内積

Fourier 級数

Fourier 変換

Bracket 記法

[1-1]　波動方程式

1 次元の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

と書かれる. 例えば, 弦の運動は, 上下への変位を $u(x,t)$ とかくと, この方程式に従う. Parameter $v > 0$ は速度の次元をもつ量で, 弦の材質などによって定まる定数である.

1. 任意の 1 変数関数 $f_1(y), f_2(y)$ を用いて,

$$u(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt) \tag{2}$$

は方程式 (1) の解になっていることを示せ. また, この解 $u(x,t)$ が, “ $t=0$ では $f_1(x)$ という波形だった, x の負の方向に進む波” と “

$t=0$ では $f_2(x)$ という波形だった, x の正の方向に進む波" との重ね合わせであることを説明せよ.

2. 方程式 (1) の, 変数分離形

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3}$$

の解を求めよ.

3. 方程式 (1) の, 基準振動解 $u(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$ (最後に実部をとると考える) で $f(x)$ を求め, その $f(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$ が, 左右に進む波の重ね合わせ (2) で書けることを示せ.

[1-2]　**境界条件**

1 次元の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x}(x,t) \tag{4}$$

を考える.

1. 固定端の境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{5}$$

のもとで, 基準振動 $u(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$ の形の解を求め, 図示せよ.

2. 自由端の境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{6}$$

のもとで, 基準振動 $u(x,t) = f(x)\mathrm{e}^{i\omega t}$ の形の解を求め, 図示せよ.

[1-3]　**初期条件と時間発展**

固定端の境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ のもとで, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x}(x,t) \tag{7}$$

を考える.

時刻 $t = 0$ において,

$$u(x,0) = A \sin \frac{2\pi}{L} x, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = B \sin \frac{2\pi}{L} x \tag{9}$$

だったとする. 任意の時刻と場所での $u(x,t)$ を求めよ.

Hint. $u(x,t) = C \sin \frac{2\pi}{L} x \sin(\omega t + \delta)$ の形の解を探す.