量子力学 I 演習 問題 (第 4 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 11 月 6 日

[4-1] Fourier 変換

次の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし, $a, \ell > 0$ は定数.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \le 1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & (x \ge 0), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a^2x^2} \tag{3}$$

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-a^2x^2} = \sqrt{\pi}/a. \tag{4}$$

[4-2] Fourier 変換と波動方程式

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{5}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = u_0 \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{6}$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. Fourier 積分表示 $f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dka(k,t)\mathrm{e}^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.

2. $u(x,0)$, $\dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める.

3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.

4. 逆 Fourier 変換で $f(x,t)$ を求める.

[4-3]　δ-関数

(超) 関数で

$$\text{任意の関数}\quad f(x)\quad \text{に対して} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x) = f(0) \tag{7}$$

あるいは

$$f(0)=\infty, f(x)=0\ (x\neq 0), \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1 \tag{8}$$

を満たすような関数 $\delta(x)$ を delta 関数という. Delta 関数の一つの表示は

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \mathrm{e}^{ikx} \tag{9}$$

である.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{ikx}$ の Fourier 変換を求めよ.

2. Delta 関数の Fourier 変換を求めよ.

3. $\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$ を示せ.

4. $\delta(f(x))=\frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$ を示せ. ただし, $x=x_0$ は $f(x)$ の唯一の零点.

5. $\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{|2a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$ を示せ.