量子力学 I 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 11 月 20 日

[6-1]　膜の振動

長方形の枠にはられた石鹸膜 $(0 < x < L_x, 0 < y < L_y)$ の振動を考える．枠と垂直な方向への変位を $u(x, y, t)$ とかく．変位 $u(x, y, t)$ は, 2 次元の波動方程式

$$v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t) \tag{1}$$

に従う．ただし v は石鹸膜の材質によって定まる正の定数．また, 枠は動かないので

$$u(0, y, t) = u(L_x, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) = 0 \quad \text{for} \quad \forall x, y, t \tag{2}$$

が課される．

1. 固有振動を求めよ．特に振動数 ω と x, y 方向の波数 k_x, k_y との関係を求めよ．

Hint. 変数分離.

2. 振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にあるような固有振動は (平均して) 何個あるか.

Hint. (k_x, k_y) の空間で, 許される波数はどのような点にあるか考えよ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[6-2]　電磁波の波動方程式

真空中の Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{6}$$

から, 電磁波の波動方程式を導く.

1. (3), (5) から, $\mathbf{E}$ だけの方程式を導き, その x, y, z 成分それぞれが速度 $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ の波動方程式であることをみよ. ただし, 3 次元空間での波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,z,t) = v^2\nabla^2 u(x,y,z,t) := v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(x,y,z,t) \tag{7}$$

だった.

Hint. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

2. 無限空間での (7) の解を, 変数分離 $u(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ で求めよ. 特に角振動数 ω と波数 k_x, k_y, k_z との関係を求めよ.

[6-3]　黒体輻射

立方体の金属の箱 $(0 \leq x, y, z \leq L)$ に閉じ込められた電磁波 (の電場成分) $\mathbf{E}$ を考える.

1. 境界条件を考える. 金属の表面では, 電場は表面に垂直なのだった. このことと, (6) とを用いて, $x = 0$ の境界上では

$$E_y(0,y,z) = E_z(0,y,z) = 0, \frac{\partial E_x}{\partial x}(0,y,z) = 0 \tag{8}$$

であることをを説明せよ.

2. $x = L, y, z = 0, L$ においても, 同様な境界条件が成立する. $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ について, 境界条件を満たす (7) の固有振動を求めよ.

3. 振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にあるような固有振動の個数を求めよ.