量子力学 I 演習 問題 (第 11回)

樋口 さぶろお*

1998年1月29日

Hermitian operators

演算子 A, B が, 任意の波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対し, 式

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|B|\psi\rangle^* (\equiv \langle B\psi|\phi\rangle) \tag{1}$$

を満たすとき, B を A の Hermite 共役演算子といい, $B = A^\dagger$ とかく. $A = A^\dagger$ のとき, A は Hermite 演算子であるという. $A = -A^\dagger$ のとき, A は 反 Hermite 演算子であるという.

交換子

演算子 A, B, C を考える. 例えば, $\frac{d}{dx}$ (x に関する微分), x (関数を x 倍する), 1 (恒等演算子) などは演算子である. 任意の関数 $f(x)$ に対して

$$ABf(x) - BAf(x) = Cf(x).$$

がなりたつとき, $C = [A, B]$ とかき, $[A, B]$ を交換子という. つまり $[A, B]f(x) := ABf(x) - BAf(x)$.

[11-1] Hermitian operators

1. 演算子 A と数 (定数倍演算子) $a \in \mathbb{C}$ に対して, $(aA)^\dagger = a^* A^\dagger$ であることを示せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

2. A が Hermite 演算子, a が実数 [純虚数] のとき, aA は Hermite [反 Hermite] 演算子であることを示せ.

3. A, B が Hermite 演算子のとき, $\{A, B\} := AB + BA$ は Hermite 演算子. $[A, B] := AB - BA$ は反 Hermite 演算子であることを示せ. 一般の演算子 A, B に対して $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ が成立することを用いてよい.

4. 演算子 $x, p = -i\hbar\frac{d}{dx}, H = \frac{p^2}{2m}$ が hermitian であることを示せ.

Hint. これらの演算子に作用される波動関数 $\psi(x)$ は, 規格化可能で $|x| \to \infty$ で $\psi(x) \to 0$ であるとする.

5. 時間と興味のある人は $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を示せ.

[11-2] Hermite 演算子の固有値, 固有状態

1. Hermite 演算子 A の固有値は実数であることを示せ.

Hint. 演算子 A の固有状態 $|\phi\rangle$ を考える: $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. 固有値 $a = \langle\phi|A|\phi\rangle$ が a^* に等しいことをいえばよい.

2. 反 Hermite 演算子の固有値は純虚数であることを示せ.

3. Hermite 演算子 A の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint. 2つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 を考える: $A|\phi_1\rangle = a_1|\phi_1\rangle, A|\phi_2\rangle = a_2|\phi_2\rangle, a_1 \neq a_2$. 行列要素 $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle$ を評価するときに, A を $\langle\phi_1|$ に作用させてもよいし, $|\phi_2\rangle$ に作用させてもよい.

[11-3] 演算子の代数

1. 演算子 $[x, \frac{d}{dx}]$ を求めよ.

2. 'x-表示' $x \to x\times$, $p \to -i\hbar\frac{d}{dx}$ が正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を満たすことを示せ.

3. 演算子 A, B を $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} - x\right)$ と定義する. 次を求めよ.

関数 $B(x \exp(-x^2/2))$,

関数 $(2AB + 1) \exp(-x^2/2)$,

演算子 $[A, B]$,

演算子 $[A, B^2]$.