量子力学 I 演習 問題 (第 12回)

樋口 さぶろお*

1998年2月5日

交換子

演算子 A, B, C を考える. 例えば, $\frac{d}{dx}$ (x に関する微分), x (関数を x 倍する), 1 (恒等演算子) などは演算子である. 任意の関数 $f(x)$ に対して

$$ABf(x) - BAf(x) = Cf(x).$$

がなりたつとき, $C = [A, B]$ とかき, $[A, B]$ を交換子という. つまり $[A, B]f(x) := ABf(x) - BAf(x)$.

[12-1] 交換子の性質

1. 任意の演算子 A, B, C に対して次を示せ.

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad \text{(Leibniz rule)}.$$

2. 関係 $[[A, B], B] = 0$ が成り立つとき,

$$[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1},$$
$$[A, g(B)] = [A, B]\,\frac{dg}{dz}(B).$$

を示せ. ただし, g は巾級数

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j \tag{1}$$

で定義される関数 (十分よい収束性を持つとしてよい).

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

3. 演算子 A, B に対して, $[A, B] = 1$ とする. 次の式を簡単にせよ.

$$[B, A], \quad [A^2, B^2], \quad [A, \mathrm{e}^B].$$

[12-2] 演算子の関数の微分

演算子 $G(A, B)$ を, 演算子 A, B の関数とする. 演算子の偏微分を, (普通の) 関数 $f(x)$ への作用により

$$\frac{\partial G}{\partial A} f(x) := \lim_{a \to 0} \frac{G(A + a, B)f(x) - G(A, B)f(x)}{a} \tag{2}$$

と定義する. a は古典的な (全ての演算子と可換な) 数.

1. $G(A, B) = ABAB + AABB$ に対し, $\partial G/\partial A$ を求めよ.

2. $(d/dA)\exp A$ を求めよ.

[12-3] 演算子の指数関数

演算子 A の指数関数 e^A を巾級数 $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ で定義する.

1. 任意の関数 $f(x)$ に対して, $e^{-a\frac{d}{dx}} f(x)$ を求めよ. $a \in \mathbb{R}$.

2. 可換な演算子 A,B に対して, $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$ を示せ.

3. 非可換な演算子 A, B に対しては, 演算子 $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B, \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A, \mathrm{e}^{A+B}$ は一般に異なる. この時には, Baker-Hausdorff の公式

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])+\cdots}$$

が成り立つことが知られている. 条件 $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ が成り立つ場合には, Baker-Hausdorff の公式は,

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = \mathrm{e}^{A+B} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{3}$$

となる. この式から $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{[A,B]} \mathrm{e}^B \mathrm{e}^A$ を示せ.

4. 式 (3) を示そう. まず, $f(t) := \mathrm{e}^{At} \mathrm{e}^{Bt}$ と定義する $(t \in \mathbb{R})$. 式

$$f(0) = 1, \quad f'(t) = (A + B + [A, B]t) f(t)$$

を示せ. 次に関数

$$f(t) = \mathrm{e}^{(A+B)t+\frac{1}{2}[A,B]t^2}$$

がこの微分方程式の解になっていることを示せ. あとは, $t = 1$ とおけばよい.