

# 量子力学 I 演習 問題 (第 2 回)

樋口 さぶろお\*

1998 年 10 月 22 日

## Fourier 級数

### [2-1] Fourier 級数展開

次の周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi n i x / L} \quad (1)$$

と展開した時の  $f_n$  を求めよ. なお, 基本周期  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$  だけを下に与える.

$$f(x) = \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (2)$$

$$f(x) = 1 - \left| \frac{2}{L} x \right| \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < \frac{L}{4}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

### [2-2] 微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$m x''(t) + m \gamma x'(t) + m \omega_0^2 x(t) = m a \cos \omega t \quad (5)$$

---

\*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,  
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

の特解を, 解  $x(t)$  が

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{2\pi/\omega}} \exp(in\omega t) \quad (6)$$

と展開されると仮定して求めよ.

### [2-3] 微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t) + m\omega_0^2 x(t) = mag(t) \quad (7)$$

の特解  $x(t)$  を, Fourier 級数として求めよ. ただし,  $g(t)$  は周期  $T$  の関数で, 基本周期  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  で

$$g(t) = \begin{cases} -1 & (-\frac{T}{2} < t < 0) \\ +1 & (0 < t < \frac{T}{2}) \end{cases} \quad (8)$$

## Fourier 変換

### [2-4] Fourier 変換

次の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし,  $a, \ell > 0$  は定数.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (10)$$

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} \quad (11)$$

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a^2 x^2} = \sqrt{\pi}/a. \quad (12)$$

[2-5]  $\delta$ -関数

(超)関数で

$$\text{任意の関数 } f(x) \text{ に対して } \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \quad (13)$$

あるいは

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (14)$$

を満たすような関数  $\delta(x)$  を delta 関数という. Delta 関数の一つの表示は

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (15)$$

である.

1.  $f(x) = e^{ikx}$  の Fourier 変換を求めよ.
2. Delta 関数の Fourier 変換を求めよ.
3.  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$  を示せ.
4.  $x = x_0$  が  $f(x)$  の唯一の零点であるとき,  $\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$  を示せ.
5.  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}(\delta(x - a) + \delta(x + a))$  を示せ.

[2-6] Fourier 変換と波動方程式

無限区間  $-\infty < x < \infty$  で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (16)$$

を考える. 時刻  $t = 0$  で,

$$u(x, 0) = u_0 \exp(-x^2/a^2), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \quad (17)$$

だったとする. 以後の時刻での  $u(x, t)$  を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示  $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k, t)e^{ikx}$  を代入して,  $a(k, t)$  の満たす微分方程式を求める.
2.  $u(x, 0), \dot{u}(x, 0)$  を Fourier 変換して  $a(k, 0), \dot{a}(k, 0)$  を求める.
3. 時間について積分して,  $a(k, t)$  を求める.
4. 逆 Fourier 変換で  $f(x, t)$  を求める.

[2-7] Fourier 変換に関する恒等式

関数  $f(t), f_i(t)$  の Fourier 変換をそれぞれ  $F(\omega), F_i(\omega)$  とする. すなわち

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega t}. \quad (18)$$

次の関数の Fourier 変換を求めよ.

$$f(t - t_0) \quad (19)$$

$$f^{(n)}(t) \quad (20)$$

$$f(t) e^{i\omega_0 t} \quad (21)$$

$$t^n f(t) \quad (22)$$

$$f_1(t) \times f_2(t) \quad (23)$$

$$f_1(t) * f_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) d\tau \quad (24)$$

演算  $*$  のことを convolution (たたみこみ) という.