量子力学 I 演習 問題 (第 3 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 10 月 29 日

Fourier 変換

[3-1] Fourier 変換

次の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし, $a, \ell > 0$ は定数.

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & (x \geq 0), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a^2 x^2} \tag{3}$$

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \mathrm{e}^{-a^2 x^2} = \sqrt{\pi}/a. \tag{4}$$

[3-2] δ-関数

(超) 関数で

$$\text{任意の関数} \quad f(x) \quad \text{に対して} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; f(x)\delta(x) = f(0) \tag{5}$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

あるいは

$$f(0)=\infty, f(x)=0\ (x\neq 0), \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x)=1 \tag{6}$$

を満たすような関数 $\delta(x)$ を delta 関数という．Delta 関数の一つの表示は

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \mathrm{e}^{ikx} \tag{7}$$

である.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{ikx}$ の Fourier 変換を求めよ.
2. Delta 関数の Fourier 変換を求めよ.
3. $\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$ を示せ.
4. $x=x_0$ が $f(x)$ の唯一の零点であるとき, $\delta(f(x))=\frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$ を示せ.
5. $\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{|2a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$ を示せ.

Fourier 級数

[3-3]　Fourier 級数

次の周期 $L=1$ の関数を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0<x<1/2)\\ 1 & (1/2<x<1)\end{cases} \tag{8}$$

$$f(x)=x \quad (0<x<1) \tag{9}$$

Fourier 級数/積分の応用

[3-4]　微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t)+m\gamma x'(t)+m\omega_0^2 x(t)=ma\cos\omega t \tag{10}$$

の特解を, 解 $x(t)$ が

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{2\pi/\omega}}\exp(in\omega t) \tag{11}$$

と展開されると仮定して求めよ.

[3-5]　微分方程式の特解

強制振動の方程式

$$mx''(t) + m\omega_0^2 x(t) = mag(t) \tag{12}$$

の特解 $x(t)$ を, Fourier 級数として求めよ. ただし, $g(t)$ は周期 T の関数で, 基本周期 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ で

$$g(t) = \begin{cases} -1 & (-\frac{T}{2} < t < 0) \\ +1 & (0 < t < \frac{T}{2}) \end{cases}. \tag{13}$$

[3-6]　Fourier 変換と波動方程式

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{14}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = u_0 \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{15}$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示 $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k,t) \mathrm{e}^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.
2. $u(x,0)$, $\dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める.
3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.
4. 逆 Fourier 変換で $f(x,t)$ を求める.