量子力学 I 演習 問題 (第 4 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 11 月 12 日

[4-1] 固有値と固有ベクトル

次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

[4-2] 対角化

行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ. また, 行列 $Q = P^{-1}AP$ が対角行列となるような基底変換行列 P を求めよ.

[4-3] 正規直交系による対角化

行列

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

が対角行列となるような正規直交基底をそれぞれ求めよ．ただし $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$.

[4-4]　対角化の応用

行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

について, $A^n, \exp(tA), \cos(tA)$ を求めよ.

[4-5]　対角化の応用: 連成振動

下のような振動子系で, 振動の一般解を求めよ. ただし, x_i はつりあいの位置からの変位とする.

[4-6]　Hermite 行列

行列 $A = (a_{jk})$ が, $a_{jk} = a_{kj}^*$ をみたすとき, A は Hermite 行列であるという. 以下 A を Hermite 行列とする.

1. 任意の vector $\vec{v}, \vec{w}$ について, 内積の関係 $(\vec{v}, A\vec{w}) = (A\vec{v}, \vec{\omega})$ を示せ.
2. A の固有値は実であることを示せ.

Hint. Vector v を固有 vector としたとき, $(\vec{v}, A\vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v})^*$ をいえばよい.

3. A のすべての固有値は互いに相異なるとする．A のすべての固有 vector は互いに直交することを示せ.

Hint. 2 つの異なる固有 vector $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ について, $(\vec{v}_1, A\vec{v}_2)$ を考える.

4. 行列 B のすべての固有値は実で, 固有ベクトルは互いに直交するとする. B が Hermite 行列であることを示せ.
5. 適当な unitary 行列 U をとって $U^\dagger AU$ が対角行列となるようにできることを示せ.