量子力学 I 演習 問題 (第 9 回)

樋口 さぶろお[*]

1998 年 12 月 17 日

A を演算子, $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ を状態とするとき, 状態 $|\psi\rangle$ と $|A\phi\rangle$ との内積 $\langle\psi|A\phi\rangle$ のことを $\langle\psi|A|\phi\rangle$ ともかく.

Hermite 共役演算子

A を演算子とする. 演算子 B が, 任意の状態 ψ, ϕ について

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|B|\psi\rangle^* (\equiv \langle B\psi|\phi\rangle) \tag{1}$$

をみたすとき, B を A の Hermite 共役演算子といい, $B = A^\dagger$ とかく. すなわち,

$$\forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \quad \langle\psi|A|\phi\rangle = \left\langle A^\dagger\psi|\phi\right\rangle. \tag{2}$$

Hermite 演算子

演算子 A が, 関係 $A = A^\dagger$ をみたすとき, A を Hermite 演算子という. すなわち

$$A \text{ が Hermite 演算子} \Leftrightarrow \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \quad \langle A\psi|\phi\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle \tag{3}$$

Unitary 演算子

演算子 A が, 関係 $AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbf{1}$ ををみたすとき, A を unitary 演算子という. すなわち

$$A \text{ が unitary 演算子} \Leftrightarrow \forall |\psi\rangle, |\phi\rangle \quad \langle A^{-1}\psi|\phi\rangle = \langle\psi|A|\phi\rangle \tag{4}$$

[*] hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[9-1] Unitary 演算子の性質

1. 座標 $x \in \mathbb{R}$ の関数に作用する演算子 $i\times, 2\times, x\times$ を考えたとき, これらの演算子の Hermite 共役を求めよ. これらの演算子は Hermite 演算子あるいは unitary 演算子か.
2. Unitary 演算子 U について $\langle U\psi|U\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$ を示せ.
3. Unitary 演算子の固有値は 絶対値 1 の複素数であることを示せ.

[9-2] Unitary 演算子と基底変換

$\{|a_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}, \{|b_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}, \{|c_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$ をそれぞれ正規直交完全系とする. 演算子 U を

$$U = \sum_{j\in\mathbb{N}} |b_j\rangle\langle a_j| \tag{5}$$

と定義する.

1. 状態 $U|a_k\rangle$ を求めよ.
2. 演算子 U が unitary であることを示せ.
3. 行列 $U_{jk} = \langle c_j|U|c_k\rangle$ が unitary 行列であることを示せ.

[9-3] 表示の変更

上の問の状況を考える.

1. ある状態 $|\psi\rangle$ が

$$|\psi\rangle = \sum_k A_k |a_k\rangle = \sum_k B_k |b_k\rangle \quad (A_k, B_k \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

と展開されるとする. 係数 A_k, B_k が, 行列 $V_{ij} = \left\langle a_i|U^\dagger|a_j\right\rangle$ によって

$$B_j = \sum_k V_{jk} A_k \tag{7}$$

と関係づけられることを示せ.
2. X を演算子とする. 複素行列 $X_{ij} = \langle a_i|X|a_j\rangle$ の成分を, 基底 $|a_k\rangle$ のもとでの X の行列要素という. 基底 $|a_k\rangle$ のもとでの行列要素と基

底 $|b_k\rangle$ のもとでの行列要素が

$$\langle b_j|X|b_k\rangle = \sum_{m,n} \left\langle a_j|U^\dagger|a_m\right\rangle\langle a_m|X|a_n\rangle\langle a_n|U|a_k\rangle = \left\langle a_j|U^\dagger XU|a_k\right\rangle \tag{8}$$

と関係づけられることを示せ.

3. 演算子 X の trace を

$$\mathrm{tr}X = \sum_k \langle a_k|X|a_k\rangle \tag{9}$$

で定義する. Trace が基底によらないことを示せ.

Remark. 任意の unitary 演算子 U について $\mathrm{tr}X = \mathrm{tr}U^\dagger XU$.

4. 演算子 X と $U^\dagger XU$ の固有値の組は等しいことを示せ.

Remark. これは任意の unitary 演算子 U について正しい.

[9-4] 時間推進

時刻 $t \in \mathbb{R}$ に依存する状態 $|\psi_t\rangle$ の従う方程式

$$-i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t\rangle = X|\psi_t\rangle \tag{10}$$

を考える. ここで, X は 時刻 t に依存しない Hermite 演算子. 状態の微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(|\psi_{t+\Delta t}\rangle - |\psi_t\rangle) \tag{11}$$

で定義される.

1. $|\psi_t\rangle = \mathrm{e}^{iXt}|\psi_0\rangle$ が解になっていることを示せ. ここで, 演算子 $U(t) = \mathrm{e}^{iXt}$ は '時間推進演算子' と解釈される. ただし, 演算子の exp は巾級数

$$\mathrm{e}^X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n \tag{12}$$

で定義される.

2. 演算子 e^{iXt} が unitary 演算子であることを示せ. ただし, Hermite 共役 $\dagger$ の性質

$$(X_1X_2)^\dagger = X_2^\dagger X_1^\dagger, \quad (X_1+X_2)^\dagger = X_1^\dagger + X_2^\dagger \tag{13}$$

を使ってよい.

3. 内積 $\langle\psi_t|\psi_t\rangle$ が t によらないことを示せ.