量子力学 I 演習 問題 (第 13回)

樋口 さぶろお*

1999 年 2 月 4 日

お知らせ

- この演習の評価は, 毎週の提出物で行ないます.
- 2 月 8 日までに成績に関する掲示を行ないます.
- 成績についての疑問, 質問, 相談は 2 月 24 日までにお願いします. ただし, 4 年生の方は, 2 月 18 日以降は成績の変更はできません.
- 今回の演習のレポートは 2 月 10 日まで受け付けます. 提出しなかった場合でも, 上で掲示された成績から減点されることはありません.
- 今回の演習の答案と解答は, 2 月 12 日以降に, 16-809B の前のポストから各自とっていって下さい. ただし, 2 月 24 日をすぎたら処分してしまうかもしれません.

[13-1]　波動関数の境界条件と規格化

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ +\infty & (x < 0, L < x) \end{cases} \tag{1}$$

のもとで, Schrödinger 方程式 $H\psi = E\psi$ の解を考える.

1. (境界条件を考慮せずに) $0 < x < L$ での一般解を求めよ.
2. 両端 $x = 0, L$ で 境界条件を課せ.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

3. 確率の規格化条件から, 規格化定数を定めよ.
4. $\psi(x)$ の概形を描け.
5. 基底状態のエネルギーを求めよ. 基底状態について, x, p の期待値を求めよ.

[13-2] 1 次元の井戸型ポテンシャル

質量 m の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ U_0 の '井戸型' ポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \quad \text{領域 I} \\ U_0(< 0) & |x| < a \quad \text{領域 II} \\ 0 & x > +a \quad \text{領域 III} \end{cases} \tag{2}$$

のもとで運動している. 束縛状態のエネルギーを求めよ (注: エネルギーは超越関数を含んだ方程式の根として与えられるが, その方程式は解けないので, 方程式をできるだけ簡単化するだけでよい). 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概要を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを E とおき, 領域 I, II, III で, それぞれ Schrödinger 方程式を解け (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる). ここで, 固有値 E は領域 I, II, III で共通であることに注意.
2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).
3. 点 $|x| = a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ.

[13-3] δ-関数のもとでの接続条件

1 次元の量子力学を考える. Potential が は有限でなめらかな関数 $U(x)$ を用いて

$$V(x) = U(x) + V_0 a\delta(x) \tag{3}$$

とかかれる時の, Hamiltonian の固有関数 $\psi(x)$ を考える. このとき, $x = 0$ で $\psi(x)$ は連続, $\psi'(x)$ は不連続になる. とびの大きさ$\lim_{x\to+0}\psi'(x) - \lim_{x\to-0}\psi'(x)$ を求めよ.

[13-4]　1 次元井戸型ポテンシャル

1 次元の粒子が, ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < L) \\ 0 < V_0 < \infty & (x > L) \end{cases} \tag{4}$$

のもとで運動している. 束縛状態を考えよう.

1. 基底状態, 第 1,2,3 励起状態が存在するとして, その波動関数の様子を直観的に描け.
2. 以下の手順に従って, 束縛状態がいくつあるかを厳密に考えよう. まず, 境界条件を考慮すると, 領域 I $(0 < x < L)$, 領域 II $(x > L)$ それぞれで, Schrödinger 方程式の解が

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\sin(kx), \tag{5}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = B\exp(-\kappa x) \tag{6}$$

   であることを示せ. ただし Hamiltonian の固有値は

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}. \tag{7}$$

3. $x = L$ での接続条件$\psi_{\mathrm{I}}(L) = \psi_{\mathrm{II}}(L)$, $\psi'_{\mathrm{I}}(L) = \psi'_{\mathrm{II}}(L)$ から, 条件

$$kL\cot(kL) = -\kappa L \tag{8}$$

   を導け.
4. (7) から κL を kL で表す式をもう一つ作れ.
5. 縦軸を κL, 横軸を kL にとり, 許される k の値を 2 つのグラフの交点として示せ.

[13-5]　δ -関数 potential のもとでの束縛状態

Potential が

$$V(x) = V_0 a\delta(x) \tag{9}$$

ただし $V_0 a < 0$, である場合に, 束縛状態を求めよ.