

量子力学 I 演習 問題 (第 10 回)

樋口 さぶろお*

1996 年 6 月 20 日

教科書を買っていない人のための摂動論の公式集

縮退のない場合 非摂動 Hamiltonian を H_0 , その固有関数, エネルギー固有値を ψ_1, ψ_2, \dots , $E_1 < E_2 < \dots$ とする. 摂動を受けた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, その固有関数 ϕ_n , エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(1) \quad W_n = E_n + \lambda \langle \psi_n | V | \psi_n \rangle + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_n | V | \psi_k \rangle \langle \psi_k | V | \psi_n \rangle}{E_n - E_k} + \dots,$$

$$(2) \quad \phi_n = \psi_n + \lambda \sum_{k \neq n} \frac{\langle \psi_k | V | \psi_n \rangle}{E_n - E_k} \psi_k + \lambda^2 \times (\text{複雑 [1, 例題 4.1]}) + \dots$$

(ほとんど) 縮退のある場合 非摂動 Hamiltonian を H_0 , その固有関数, エネルギー固有値を $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_a, \psi_{a+1}, \dots$, $E_1 < E_2 < \dots < E_a \approx E_{a+1} < \dots$ とする. 摂動を受けた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, $a, a+1$ に対応する固有関数 ϕ_n , エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(3) \quad W_a = W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)} + \lambda^2 \sum_{k \neq a, a+1} \frac{\langle \phi_a^{(0)} | V | \psi_k \rangle \langle \psi_k | V | \phi_a^{(0)} \rangle}{W_a^{(0)} - E_k} + \dots,$$

$$(4) \quad \phi_a = \phi_a^{(0)} + \lambda \sum_{k \neq a, a+1} \frac{\langle \psi_k | V | \phi_a^{(0)} \rangle}{W_a^{(0)} - E_k} \psi_k + \lambda^2 \times (\text{複雑}) + \dots,$$

ただし, $\phi_a^{(0)}, W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)}, \phi_{a+1}^{(0)}, W_{a+1}^{(0)} + \lambda W_{a+1}^{(1)}$ は, ψ_a と ψ_{a+1} の間で対角化を行なって決める.

*Internet address: hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[10-1] 摂動論

2つのエネルギー固有状態を持つ系に対する摂動を考える。無摂動状態の固有関数を基底にとったとき、摂動を受けた系の Hamiltonian 行列を

$$(5) \quad H = H_0 + \lambda V = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$$

とする。ただし λ は摂動パラメタ。

1. 摂動を受けた系の Hamiltonian を厳密に対角化し、エネルギー固有値と固有関数を求めよ。
2. $|E_1 - E_2| \gg |\lambda a|$ と仮定すると、縮退のない場合の摂動論が使える。摂動を受けた系のエネルギー固有値を、摂動の1次、および2次で求めよ。摂動を受けた系の固有関数を、摂動の1次で求めよ。結果を厳密解と比較せよ。

[10-2] 1次元調和振動子に対する摂動

1次元の調和振動子 $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ に摂動

$$(6) \quad 1. \lambda x \quad 2. \frac{1}{2}\lambda x^2$$

がくわった。摂動論の1次および2次でエネルギー固有値を求めよ。また、摂動を用いずに厳密に解いた結果と比較せよ [1, 例題 4.2, 問題 4-1[1]]。

[10-3] 等方的な2次元調和振動子に対する非等方的摂動

2次元の等方的調和振動子を考える [1, 問題 4-2[1]]:

$$(7) \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

1. 基底エネルギーを求めよ (1次元の調和振動子の解は知っているものとしてよい)。
2. 摂動 $V = \lambda m\omega^2 xy$ ($\lambda \ll 1$) がくわったとき、摂動論を用いて、基底エネルギーを λ の2次で求めよ。
3. 摂動のくわった系の基底エネルギーを厳密に求めよ。

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.