量子力学 I 演習 問題 (第 13回)

樋口 さぶろお*

1996年7月11日

教科書を買っていない人のための非定常状態の摂動論

非摂動 Hamiltonian H_0 に時間に依存する摂動 $\lambda V(t)$ が加わって $H = H_0 + \lambda V(t)$ となったとする ($\lambda \ll 1$). 波動関数 $\Psi(x,t)$ に対する Schrödinger 方程式は

(1) $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [H_0 + \lambda V(t)]\Psi.$$

波動関数 $\Psi(x,t)$ を, 非摂動 Hamiltonian H_0 の固有関数 $\psi_s(x)$ (エネルギー固有値 E_s) で

(2) $$\Psi(x,t) = \sum_s a_s(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_s t\right)\psi_s(x)$$

と展開する. このとき a_s の時間発展を決める方程式は

(3) $$\frac{da_s(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\sum_m a_m(t)\lambda\langle\psi_s|V(t)|\psi_m\rangle\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_s - E_m)t\right)$$

である.

とくに, 時刻 $t=0$ で系が状態 ψ_n にあったとき, 摂動の 1 次で

(4) $$a_m(t) = \delta_{mn} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\lambda\langle\psi_n|V(t')|\psi_m\rangle\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t'\right).$$

[13-1] 時間に依存する摂動論

2 つの状態を持つ量子力学的系があり, その Hamiltonian 行列が

(5) $$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

と書かれる. 系は時刻 $t=0$ に, 状態 ${}^t(1,0)$ にあった. 摂動

(6) $$\lambda V(t) = \lambda\begin{pmatrix} 0 & \cos\omega t \\ \cos\omega t & 0 \end{pmatrix} \qquad (\omega \in \mathbf{R}, \lambda \ll |E_1 - E_2|)$$

が加わり全 Hamiltonian が $H = H_0 + \lambda V(t)$ となる. 時刻 $t > 0$ に系が 状態 ${}^t(0,1)$ にある確率を, 時刻に依存する摂動論を用いて λ の 1 次まで計算せよ. ただし, $|E_1 - E_2 \pm \hbar\omega|$ はあまり小さくないと仮定してよい.

*Internet address: `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp` URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[13-2] 指数関数的に減少する力

1 次元の調和振動子

$$(7) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

を考える. 生成消滅演算子は $b, b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x \pm \frac{ip}{m\omega} \right)$ で定義されるのだった.

時刻 $t < 0$ では, 系は基底状態にあったとする. 時刻 $t \geq 0$ で摂動として, 力

$$(8) \quad F(t) = F_0 \exp[-t/\tau]$$

が加わったとする ($F_0, \tau \in \mathbf{R}$ は定数). 時刻 $t \geq 0$ で系が第 1 励起状態にある確率を求め, 極限 $t \to \infty$ でこの確率がある値に収束することを示せ. 1 次の摂動論の範囲で, 第 2 以上の励起状態への遷移は起こるか.

[13-3] 定数的な摂動

2 つのエネルギー固有状態 ψ_1, ψ_2, (エネルギー固有値 E_1, E_2) を持つ系を考える:

$$(9) \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

時刻 $t = 0$ では, 系は ψ_1 にあるとする.

摂動

$$(10) \quad V(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^* & V_{21} \end{pmatrix} & (t \geq 0) \end{cases}$$

が加わる. ただし, V_{jk} そのものは時刻によらない. 時刻 $t > 0$ で系が ψ_2 にある確率を 1 次の摂動論で求めよ. また, 系の時間発展を厳密に解き, 比較せよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.

[3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.