

# 量子力学 I 演習 問題 (第 14 回)

樋口 さぶろお\*

1996 年 7 月 18 日

連絡 この問題に対応する report を出す人は 7 月 25 日までをお願いします。また 7 月中に、成績に関する掲示を行ないますので、注意して下さい。この掲示が見られない人は、あらかじめ相談に来ることをおすすめします。

## [14-1] Slater 行列式

2 電子系を考える。電子 1, 2 の位置, スピン座標をまとめて  $\xi_1, \xi_2$  とかく。1 電子の正規直交系を  $\{\psi_a(\xi)\}_{a \in \mathbf{Z}}$  とする。Slater 行列式

$$(1) \quad \Psi_{ab}(\xi_1, \xi_2) = (2!)^{-1/2} \begin{vmatrix} \psi_a(\xi_1) & \psi_b(\xi_1) \\ \psi_a(\xi_2) & \psi_b(\xi_2) \end{vmatrix}$$

で与えられる 2 電子の波動関数を考える。

1. 反対称性  $\Psi_{ab}(\xi_1, \xi_2) = -\Psi_{ab}(\xi_2, \xi_1)$  をいえ。
2. この波動関数が Pauli 原理と矛盾しないことを説明せよ。
3. 関数系  $\{\Psi_{ab}(\xi_1, \xi_2)\}_{a, b \in \mathbf{Z}, a < b}$  が正規直交系であることをいえ。

## [14-2] Spin 波動関数と空間波動関数

質量  $m$  の spin 1/2 fermion が, 1 次元の potential

$$(2) \quad V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (x < 0, L < x) \end{cases}$$

のもとで運動している ( spin 座標は Hamiltonian に現れない)。

1. 粒子が 1 個のとき, エネルギー固有関数とエネルギー固有値を求めよ。
2. 2 個の同一粒子の場合を考える。Spin triplet state にあるという前提のもとでの, エネルギーが最低の状態を求めよ。
3. 2 個の同一粒子の場合を考える。Spin singlet state にあるという前提のもとでの, エネルギーが最低の状態を求めよ。

---

\*Internet address: [hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp](mailto:hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp) URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,  
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

### [14-3] 対称性・反対称性

$n$  粒子系の波動関数  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  が, 粒子  $\xi_1, \dots, \xi_n$  について対称な Hamiltonian  $H(\xi_1, \dots, \xi_n)$  の固有関数であるとする (縮退はないとする).  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$  は完全対称または完全反対称であることをいえ.

次の手順に従ってもよい.

1. 互換演算子  $P_{ij} (= P_{ji}, i, j = 1, \dots, n)$  を

$$(3) \quad P_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n) = \psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n)$$

によって定義すると,  $[H, P_{ij}] = 0$ . (よって,  $H$  と  $P_{ij}$  は同時固有状態を持つ.)

2.  $P_{ij}^2 = 1$  から,  $P_{ij}$  の固有値を考える.

### [14-4] 3個の spin 1 boson

Spin 1 自由 boson 3個からなる系を考える.

1. 3粒子の波動関数の空間部分が完全対称であることがわかっているとする. Spin 波動関数を  $|+\rangle |0\rangle |+\rangle$  などと表記する. 次の3つの場合について, 規格化された3粒子の spin 波動関数を作れ.

- 3粒子とも  $|+\rangle$  で表される状態にある.
- 2粒子とも  $|+\rangle$ , 1粒子が  $|0\rangle$  で表される状態にある.
- 3粒子が異なる状態にある.

2. 3粒子の波動関数の空間部分が完全反対称であることがわかっているとする. 上の3つの場合のうち, 可能な場合に3粒子の spin 波動関数を作れ.

## 参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] 中嶋, 量子力学 II, 物理入門コース 6 岩波書店.
- [3] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968). 訳書は吉岡書店.
- [4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985). 訳書は吉岡書店.