

量子力学 I 演習 問題 (第 12 回)

樋口 さぶろお*

1998 年 2 月 5 日

はじめに

予備知識 この演習では, 主に, 講義 量子力学 II (吉岡先生) の進度に同期して問題を解きます. また, 4 学期の講義 量子力学 I (桜井先生) の復習となる問題も扱います. したがって, 量子力学 I・II を受講せず, この演習だけを受講する場合には, 相当する内容を各自が学習することが必要になります.

教科書 プリントを配布します. 問題の一部は, 量子力学 II の教科書 [1] に基づきます.

評価 出席回数, 授業中に解いた問題, レポートなどにより判定します. 出席重視. 試験は行わない予定.

通知 この演習に関する通知は, 基礎科学科掲示版 または 16 号館 809B 号室の前の壁, または

URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1/>

で行ないます.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
Room: Komaba 16-809B, Phone: (03)54.54.67.35

演習の進め方 未定ですが、今回については、

- 授業時間内にいくつかの問題をレポート用紙 (A4 だと助かる) に解いて提出してください。たくさん解けなかった場合でも、授業中に物理を考えていたことがわかるように何か書いて提出して下さい。これで出席とします。
- その週の金曜日までに、暇と興味に応じて好きなだけ問題を解いて、レポートとして 413B の前のポストに提出して下さい。授業中に解いた分とあわせて、1 (大) 問以上解くようにして下さい。
- 次回に問題 (の一部) を解説し、間に合えばレポートを返却します。

[12-1] 波動関数の境界条件と規格化

1 次元の '箱' $0 \leq x \leq L$ に閉じ込められた粒子の波動関数

$$\Psi(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)] + B \exp[i(-kx - \omega t)]$$

を考える ($k, \omega \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{C}$).

1. 両端 $x = 0, L$ で $\Psi(x, t) = 0$ という境界条件を満たすためには、定数 k はどのような条件を満たせばよいか。
2. $x < 0, L > x$ で $\Psi(x, t) = 0$ であるとして、規格化条件から A, B を決めよ。
3. 上で求めた k, A, B に対し、 $\Psi(x, t)$ の概形を描け。

[12-2] 演算子の代数

演算子 A, B, C を考える。例えば、 $\frac{d}{dx}$ (x に関する微分)、 x (関数を x 倍する)、 1 (恒等演算子) などは演算子である。任意の関数 $f(x)$ に対して

$$ABf(x) - BAf(x) = Cf(x).$$

がなりたつとき、 $C = [A, B]$ とかき、 $[A, B]$ を交換子という。つまり $[A, B]f(x) := ABf(x) - BAf(x)$ 。

1. 演算子 $[x, \frac{d}{dx}]$ を求めよ。

2. 演算子 A, B を

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} + x \right), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dx} - x \right)$$

と定義する. 次を求めよ.

$$\text{関数 } B(x \exp(-x^2/2)),$$

$$\text{関数 } (2AB + 1) \exp(-x^2/2),$$

$$\text{演算子 } [A, B],$$

$$\text{演算子 } [A, B^2].$$

[12-3] 交換子の性質

1. 任意の演算子 A, B, C に対して次を示せ.

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad (\text{Leibniz rule}).$$

2. 関係 $[[A, B], B] = 0$ が成り立つとき,

$$[A, B^n] = n[A, B]B^{n-1},$$

$$[A, g(B)] = [A, B] \frac{dg}{dz}(B).$$

を示せ. ただし, g は巾級数

$$(1) \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j$$

で定義される関数 (十分よい収束性を持つとしてよい).

3. 演算子 A, B に対して, $[A, B] = 1$ とする. 次の演算子を求めよ (簡単な式に直せ).

$$[A^2, B^2],$$

$$[A, e^B].$$

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).
- [3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)