量子力学 I 演習 問題 (第 2 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 4 月 21 日

[2-1] 波動関数の規格化

次の波動関数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ の形を直観的にとらえよ. これらは規格化可能か. 可能なものに対しては, 規格化定数を定めよ. 粒子を発見する可能性が zero であるような点 (無限遠を含む) があるか. (引数が 3 次元 vector $\mathbf{x}$ のものは 3 次元の波動関数, 1 次元座標 x のものは 1 次元の波動関数)

$$
\begin{aligned}
&(1) & \Psi(\mathbf{x}, t) &= \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)] \\
&(2) & \Psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{|\mathbf{x}|}\exp[i(k|\mathbf{x}| - \omega t)] \\
&(3) & \Psi(x, t) &= \exp[-i\omega t]\exp[-(kx)^2/2] \\
&(4) & \Psi(x, t=0) &= kx\exp[-(kx)^2/2]
\end{aligned}
$$

Hint: Gauss 積分 $\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-x^2]$.

[2-2] x, p の交換関係

演算子 x, p が正準交換関係 $[x, p] = i\hbar$ を満たすとする.

1. 'x-表示' $x \to x\times$, $p \to -i\hbar(d/dx)$ が上の正準交換関係を満たすことを示せ.
2. $[x^2, p^2] = 2\hbar^2 + 4i\hbar xp$ を示せ (上の x-表示をとってもよい).
3. 上の x-表示をとったとき, 演算子 p^2x^2 を 関数 $\sin ax$ に作用させてみよ.

*`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[2-3]　演算子の関数の微分

演算子 $f(A,B)$ を, 演算子 A,B の関数とする. 演算子の偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial A} := \lim_{a\to 0}\frac{f(A+a,B)-f(A,B)}{a} \tag{5}$$

と定義する. a は古典的な (全ての演算子と可換な) 数.

1. $f(A,B)=ABAB+AABB$ に対し, $\partial f/\partial A$ を求めよ.
2. $(d/dA)\exp A$ を求めよ.

[2-4]　演算子の指数関数

演算子 A の指数関数 e^A は, 巾級数により $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ と定義される.

1. 可換な演算子 A,B に対して, $\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$ を示せ.
2. 非可換な演算子 A,B に対しては, 演算子 $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B, \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A, \mathrm{e}^{A+B}$ は一般に異なる. この時には, Baker-Hausdorff の公式

   $$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])+\cdots}$$

   が成り立つことが知られている. 条件 $[[A,B],A]=[[A,B],B]=0$ が成り立つ場合には, Baker-Hausdorff の公式は,

   $$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = \mathrm{e}^{A+B}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{6}$$

   となる. 以下, この条件のもとで考える. $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{[A,B]}\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$ を示せ.
3. 式 (6) を以下のようにして示そう. まず, $f(t):=\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{Bt}$ と定義する $(t\in\mathbb{R})$.

   $$f(0)=1,$$
   $$f'(t)=(A+B+\frac{1}{2}[A,B]t)f(t)$$

   を示せ. 次に関数

   $$f(t)=\mathrm{e}^{(A+B)t+\frac{1}{2}[A,B]t^2}$$

   がこの微分方程式の解になっていることを示せ. あとは, $t=1$ とおけばよい.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)