量子力学 I 演習 問題 (第 3 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 4 月 28 日

[3-1] 固有状態, 期待値

有限な 1 次元空間 $0 < x < L$ を運動する粒子の波動関数

(1) $\psi_k(x) = A\exp(ikx)$

を考える. $A \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}$. テキスト [1] の例題 1.7 等を参照せよ.

1. この波動関数が, 運動量演算子 $-i\hbar\frac{d}{dx}$, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
2. 以下, 周期境界条件 $\psi_k(0) = \psi_k(L)$ を課す (いわば, 円周上に拘束された粒子). このとき, k に対する条件を求めよ.
3. 規格化定数 A の値を定めよ.
4. 粒子が, 上の波動関数の重ねあわせ

   (2) $\psi(x) = \psi_k(x) - 2\psi_{2k}(x) = \exp(ikx) - 2\exp(i(2k)x)$

   であらわされる状態にある. 位置と運動量の期待値を求めよ. 規格化に注意.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[3-2]　並進演算子

演算子 $x, p = -i\hbar(d/dx)$ を 1 次元の位置, 運動量演算子とする．すなわち, $[x, p] = i\hbar$.

1. 交換子 $[x, \exp(ipa/\hbar)]$ を求めよ．a は実数.
2. 波動関数 $\psi_0(x)$ を, 演算子 x の固有関数とする．固有値を x_0 とする．すなわち, $x\psi_0(x) = x_0\psi_0(x)$. 波動関数 $\exp(ipa/\hbar)\psi_0(x)$ も演算子 x の固有関数であることを示せ．固有値は何か (上の交換子が計算できれば, $\psi_0(x)$ の具体的な形はいらないはず).

Hint. $x \exp(ipa/\hbar)\psi_0(x) =$ (固有値) $\times \exp(ipa/\hbar)\psi_0(x)$ がいえればよい.

3. 演算子 $\exp(ipa/\hbar)$ にはどのような直観的意味があるか.

[3-3]　Gaussian wave packet

1 次元の規格化された波動関数

$$\psi(x) = \pi^{-1/4} d^{-1/2} \exp\left[ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right]$$

を考える ($d > 0$).

1. この波動関数 (の実部) の概形を描け.
2. 演算子 x, x^2, p, p^2 の期待値を求めよ.

Hint. Gauss 積分, 平方完成.

3. 式

$$(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2) \times (\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2) = \hbar^2/4 \tag{3}$$

を示せ.

Remark. これは, 不確定性関係 $\Delta x \times \Delta p \geq \hbar/2$ で等号が成り立っている場合である．実は, 全く任意の波動関数に対して, 正準交換関係だけから出発して, ((3) の左辺) $\geq \hbar^2/4$ が成り立つことが示せる.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)