量子力学 I 演習 問題 (第 4 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 5 月 12 日

訂正 [2-4]3. で, 導くべき微分方程式は $f'(t) = (A + B + [A, B]t)f(t)$ の誤りでした. 訂正します.

[4-1] 正規直交固有関数系

周期境界条件 $\psi(0) = \psi(L)$ を課された 1 次元の自由粒子を考える.

1. 運動量演算子 $p = -i\hbar(d/dx)$ の固有関数系は

$$\phi_n(x) = L^{-1/2} \exp(2n\pi ix/L) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

で与えられる. 固有値 p_n を求めよ. 関数系 $\{\phi_n\}$ が正規直交完全系であることを示せ.

Hint. 周期的境界条件のもとでの, δ-関数 $\delta_{(L)}(x)$ は次の式で与えられる.

$$\delta_{(L)}(x) = L^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(2n\pi ix).$$

2. 規格化された波動関数 $\psi(x) = (5L)^{1/2}(\exp(2\pi ix) - 2i \exp(-4\pi ix))$ について, 内積 $\langle \phi_n | \psi \rangle$ を求めよ.

3. 状態 $\psi(x)$ の p の期待値を,

$$\int dx \psi^*(x) p \psi(x), \qquad \sum_n |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2 p_n$$

の二つの方法で求めてみよ.

* hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

4. 位置演算子, Hamiltonian 演算子の固有状態を求めよ．運動量演算子と同時対角化可能なのはどちらか．また縮退があるのはどちらか.

[4-2] Hermitian operators

演算子 A, B が, 任意の波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対し, 式

(1) $\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|B|\psi\rangle^*(\equiv \langle B\psi|\phi\rangle)$

を満たすとき, B を A の Hermite 共役演算子といい, $B = A^\dagger$ とかく．$A = A^\dagger$ のとき, A は Hermite 演算子であるという．$A = -A^\dagger$ のとき, A は 反 Hermite 演算子であるという．テキストの例題 1.9 参照.

1. 演算子 A と数 (定数倍演算子) $a \in \mathbb{C}$ に対して, $(aA)^\dagger = a^* A^\dagger$ であることを示せ.

2. A が Hermite 演算子, a が実数 [純虚数] のとき, aA は Hermite [反 Hermite] 演算子であることを示せ.

3. A, B が Hermite 演算子のとき, $\{A, B\} := AB + BA$ は Hermite 演算子．$[A, B] := AB - BA$ は反 Hermite 演算子であることを示せ．一般の演算子 A, B に対して $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ が成立することを用いてよい.

4. 演算子 $x, p = -i\hbar(d/dx), H = p^2/2m$ が hermitian であることを示せ.

Hint. これらの演算子に作用される波動関数 $\psi(x)$ は, 規格化可能で $|x| \to \infty$ で $\psi(x) \to 0$ であるとする.

5. 時間と興味のある人は $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を示せ.

[4-3] Hermite 演算子の固有値, 固有状態

1. Hermite 演算子 A の固有値は実数であることを示せ.

Hint. 演算子 A の固有状態 $|\phi\rangle$ を考える: $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. 固有値 $a = \langle\phi|A|\phi\rangle$ が a^* に等しいことをいえばよい.

2. 反 Hermite 演算子の固有値は純虚数であることを示せ.

3. Hermite 演算子 A の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint. 2つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 を考える: $A\left|\phi_1\right\rangle = a_1\left|\phi_1\right\rangle, A\left|\phi_2\right\rangle = a_2\left|\phi_2\right\rangle, a_1 \neq a_2$. 行列要素 $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle$ を評価するときに, A を $\langle\phi_1|$ に作用させてもよいし, $|\phi_2\rangle$ に作用させてもよい.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)