量子力学 I 演習 問題 (第 5 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 5 月 26 日

[5-1] Schrödinger 方程式

Hamiltonian H は時間に依存しないとする. 波動関数 $\psi(x,t)$ は Schrödinger 方程式

(1) $$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = H\psi(x,t)$$

にしたがって発展する.

1. 時刻 $t = 0$ で, $\psi(x, t = 0) = \phi(x)$, ただし, $\phi(x)$ は Hamiltonian の固有関数: $H\phi(x) = E\phi(x)$ であるとする. このとき, $\psi(x,t) = \phi(x)\exp[-iEt/\hbar]$ であることを示せ.

2. 粒子が, $\psi(x) = \phi(x)\exp[-iEt/\hbar]$ のような状態にあるとき, 演算子 $1, x, p$ (一般に, 時間に explicit には依存しない演算子) の期待値は時間変化しないことを示せ.

Hint. 異なる E に対する $\phi(x)\exp[-iEt/\hbar]$ の重ね合わせの場合にはそうとは限らない.

[5-2] Schrödinger 方程式

周期境界条件 $\psi(0) = \psi(L)$ を課された 1 次元の自由粒子を考える: $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$. 関数系 $\phi_n(x) = L^{-1/2}\exp(2n\pi ix/L) \quad (n \in \mathbb{Z})$ は正規直交完全系をなしている.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

粒子が, 時刻 $t = 0$ に, 波動関数

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_1(x) + \frac{-2i}{\sqrt{5}}\phi_{-2}(x)$$

によって表される状態にあるとする.

1. 時刻 $t = 0$ での, 位置 x での粒子の存在確率密度を求め, グラフを描け. 位置演算子 x の期待値を求めよ.

2. この波動関数は, Schrödinger 方程式 (1) にしたがって時間発展する. 一般の時刻 t での波動関数 $\psi(x, t)$ を求め, 時刻 t での存在確率密度のグラフを描け. 時刻 t での位置の期待値を求めよ.

HInt. 解は, $\psi(x, t) = a_1(t)\phi_1(t) + a_{-2}(t)\phi_{-2}(x)$ の形になる. Schrödinger 方程式の解の線型結合はまた解.

3. 関数系 $\{\phi_n(x)\}$ を基底にとったときの, 演算子 $A = p, x, H$ の表現行列 $\langle\phi_n|A|\phi_m\rangle$ を求めよ.

[5-3] Schrödinger eq

系の状態の空間が, 2 つだけの関数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ からなる (Hamiltonian の固有関数とは限らない) 正規直交完全系を持っているとする. 例えば, 壁で 2 つに仕切られた箱に 1 粒子が入っている系で, $\phi_1(\phi_2)$ は右 (左) 側に粒子のある状態などと思えばよい. 任意の波動関数 ψ は

$$\psi(x, t) = a_1(t)\phi_1(x) + a_2(t)\phi_2(x)$$

とかける.

1. 波動関数 ψ に対する Schrödinger 方程式 (1) から, $a_1(t), a_2(t)$ の時間発展を決める微分方程式が, 次で与えられることを示せ.

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\phi_1|H|\phi_1\rangle & \langle\phi_1|H|\phi_2\rangle \\ \langle\phi_2|H|\phi_1\rangle & \langle\phi_2|H|\phi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} =: \mathbf{Ha}(t).$$

2. Hamiltonian の行列表示 が

$$\mathbf{H} = \Delta \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする．これは, 粒子が壁を透過することを許していることに相当する．上で求めた微分方程式を用いて, 時刻 $t = 0$ で箱の右側にいた粒子を, 時刻 t で左側に発見する確率を求めよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)