量子力学 I 演習 問題 (第 6 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 6 月 2 日

[6-1] 調和振動子

位置, 運動量演算子をそれぞれ x, p ($[x,p] = i\hbar$, あるいは $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ と思ってもよい) とするとき, 調和振動子の Hamiltonian は,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

である $(m, \omega \in \mathbb{R})$. 昇降演算子 $b, b^\dagger$ を

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - (im\omega)^{-1}p), \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + (im\omega)^{-1}p)$$

と定義する. これらは互いに Hermite 共役である.

1. 式 $H = \hbar\omega b^\dagger b + \hbar\omega/2$ を示せ (x, p が非可換であることに注意).
2. 交換子 $[b, b^\dagger]$ を求めよ.
3. Hermite 演算子 $b^\dagger b$ の, 固有値 a の規格化された固有状態を $|\psi_a\rangle$ とするとき, $b^\dagger|\psi_a\rangle = \sqrt{a+1}\,|\psi_{a+1}\rangle$, $b\,|\psi_a\rangle = \sqrt{a}\,|\psi_{a-1}\rangle$ を示せ (規格化条件に注意).

Hint. 次の常套手段を用いてもよい.

(a) 交換関係を用いて, $(b^\dagger b)b^\dagger|\psi_a\rangle = A \times b^\dagger|\psi_a\rangle$ をいう. これで, $b^\dagger|\psi_a\rangle = C\,|\psi_A\rangle$ をいったことになる.

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

(b) 規格化条件から 比例定数 C を決める.

4. 期待値 $\langle\psi_0|x|\psi_0\rangle, \langle\psi_0|x^2|\psi_0\rangle$ を求めよ.

Hint. x を $b, b^\dagger$ でかく. 途中で Hermite 演算子の固有状態の直交性を使う.

[6-2] Hermite polynomials

上で考えた固有関数 $\psi_a(x)$ の形を具体的に求めることを考えよう.

1. 固有値 $a=0$ に対応する固有関数 $\psi_0(x)$ は基底状態となる. なぜなら, $b\psi_0(x)=0$ となり, $a=0$ より小さい固有値をもつ固有関数は作れないからである. まず, この $\psi_0(x)$ を求めよう. 演算子 p を $-i\hbar(\partial/\partial x)$ とみなすと式

$$b\psi_0(x)=0$$

は x についての微分方程式になる. これを解いて, $\psi_0(x)$ を求めよ.

Hint. $f'(x)=Axf(x)$ の type の微分方程式の解は $f(x)=C\exp[Bx^2]$.

2. 関係 $b\,|\psi_a\rangle=\sqrt{a}\,|\psi_{a-1}\rangle$ を用いて, $a=1,2$ に対する $\psi_a(x)$ を求めよ.

Remark. 一般の $a=n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, は, $\psi_n(x)$ は本質的に Hermite 多項式 $\times\exp[-Ax^2]$ となることが知られている [1, (2.16)]

[6-3] 運動量表示の波動関数

テキストの問題 1-4[4] を参照せよ. 規格化された波動関数

$$\psi(x)=(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}dp\phi(p)\exp(ipx/\hbar) \tag{1}$$

を考える. 関数 $\phi(p)$ を, 波動関数 ψ であらわされる状態の, 運動量表示の波動関数という.

1. 運動量の期待値 $\langle\psi|-i\hbar(d/dx)|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.

Hint 先に x-積分を実行する.

2. 位置の期待値 $\langle\psi|x|\psi\rangle$ を (p の一重積分の形に) 求めよ.

Hint 被積分関数の中の x を d/dp などで書き直せないか.

3. 位置表示の波動関数 $\psi_k(x) = \exp(ikx)$ を運動量表示にせよ.

上の過程で, おそらく, δ-関数の積分表示 (テキストの問題 1-5[4] 参照)

$$(2) \qquad \delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\exp(ipx)$$

および δ-関数の性質

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0) \quad (f \text{ は任意の関数})$$

を用いることになるだろう.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)