量子力学 I 演習 問題 (第 7回)

樋口 さぶろお*

1997年6月9日

[7-1] 角運動量代数

3次元の座標演算子 $x_i \quad (i=1,2,3)$, 運動量演算子 $p_i \quad (i=1,2,3)$ は, 正準交換関係

$$[x_i, p_j] = -i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

を満たす. 角運動量演算子 $L_i \quad (i=1,2,3)$ は

$$L_1 := x_2 p_3 - x_3 p_2, \qquad L_2, L_3 \text{は, その cyclic permutation.}$$

と定義される.

1. 演算子 L_i が hermitian であることを示せ. 演算子 x_i, p_j は hermitian であるとしてよい.
2. 全角運動量演算子を $\mathbf{L}^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ と定義する. 交換子 $[L_1, L_2], \quad [\mathbf{L}^2, L_3]$ を求めよ.

Hint. 添字の対称性をうまく利用すると簡単になる.

[7-2] 角運動量演算子の固有状態

角運動量演算子 L_1, L_2, L_3 は, $L_1 := x_2 p_3 - x_3 p_2$ などと定義されるのだった. ここでは, 定数倍だけ変更した演算子 M_i を $L_i = \hbar M_i$ として導入する. 演算子 $\mathbf{M}^2 := M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ とする.

*`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

1. $M_\pm = M_1 \pm iM_2$ (複号同順) と定義する．関係 $M_+^\dagger = M_-$ を示せ．交換子 $[M_\pm, \mathbf{M^2}], [M_\pm, M_3]$ を求めよ．

2. $[\mathbf{M}^2, M_3] = 0$ なので, $\mathbf{M}^2, M_3$ は同時対角化可能．これらの同時固有関数を ψ_{jm} と書く．ただし, 固有値は,

$$\mathbf{M}^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm}, \quad M_3\psi_{jm} = m\psi_{jm}.$$

である．式

$$M_\pm\psi_{jm} \propto \psi_{j\, m\pm1}$$

を示せ．

Hint. 調和振動子の昇降演算子のときの証明と同じ方法．波動関数 $M_\pm\psi_{jm}$ が, $\mathbf{M}^2$, M_3 の固有値 $j(j+1), m\pm1$ の固有関数であることを示す．それには $\mathbf{M}^2, M_3$ を作用させて, 交換関係を用いて計算すればよい．

Remark. 正しい規格化を行なうと

$$(1) \qquad M_\pm\psi_{jm} = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\ \psi_{j\, m\pm1}$$

である．これを示すには, $M_+^\dagger = M_-$ などを用いる．

[7-3] 球関数

極座標をとる:

$$x = r\sin\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

演算子 M_z, M^2 の同時固有関数の $\psi_{jm}(r,\theta,\phi)$ で, $j \to j, m \to -j$ としたもの $\psi_{j\,-j}(r,\theta,\phi)$ を考える．次の手順で, $\psi_{j\,-j}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ とかいたときの球関数 $Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ．以下, 規格化は暇と興味のある人だけ気にすればよい．

1. $Y_{j\,-j}(\theta,\phi)$ が θ と ϕ に変数分離されるとして, ϕ-依存性を, $M_zY_{j\,-j} = -jY_{j\,-j}$ から決めよ．

Hint. $M_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.

2. 式 (1) より $M_- \psi_{j\ -j} = 0$ となる．これを解いて $Y_{j\ -j}$ の θ-依存性を決めよ．ただし, $M_\pm$ は

$$M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

という表示を持つことを使ってよい.

3. $Y_{j\ (1-j)}(\theta,\phi)$ を求めよ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)