量子力学 I 演習 問題 (第 8 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 6 月 16 日

[8-1] 球関数

極座標をとる:

$$x = r\sin\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

演算子 M_3, $\mathbf{M}^2$ の同時固有関数の $\psi_{jm}(r,\theta,\phi)$ で, $j \to j, m \to -j$ としたもの $\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi)$ を考える. 次の手順で, $\psi_{j\ -j}(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ とかいたときの球関数 $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ を具体的に求めよ. 以下, 規格化は暇と興味のある人だけ気にすればよい.

1. $Y_{j\ -j}(\theta,\phi)$ が θ と ϕ に変数分離されるとして, ϕ-依存性を, $M_3 Y_{j\ -j} = -jY_{j\ -j}$ から決めよ.

Hint. $M_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$.

2. $M_-\psi_{j\ -j} = 0$ である. これを解いて $Y_{j\ -j}$ の θ-依存性を決めよ. ただし, $M_\pm$ の次の表示を使ってよい.

$$M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

3. $Y_{j\ (1-j)}(\theta,\phi)$ を求めよ.

---

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[8-2]　中心力場

中心力ポテンシャル $U(r)$ のもとで 3 次元空間を運動する, 質量 m の粒子の量子力学を考える.

1. (時間に依存しない) Schrödinger 方程式をかけ.
2. 極座標 (r, θ, ϕ) をとったとき, 波動関数 $\Psi(r, \theta, \phi)$ が
$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$
と変数分離されるとする. $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $\Phi(\phi)$ の満たす方程式をかけ (hint: 方位量子数, 磁気量子数にあたる新しい定数が 2 つ現れる). ただし, $\mathbf{L}^2$ は全角運動量とすると Laplacian の極座標表示は次の通り.
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\boldsymbol{L}^2$$
3. $\chi(r) := R(r)r$ と定義すると, $\chi(r)$ は, ポテンシャル
$$V_\ell(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2mr^2}\ell(\ell+1)$$
のもとで 1 次元空間を運動する粒子の波動関数であることを示せ [1, 式 (3.27),(3.28)].

[8-3]　1 次元の井戸型ポテンシャル

質量 m の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ U_0 の ‘井戸型’ ポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \quad \text{領域 I} \\ U_0(<0) & |x| < a \quad \text{領域 II} \\ 0 & x > +a \quad \text{領域 III} \end{cases} \tag{1}$$

のもとで運動している. 束縛状態のエネルギーを求めよ (注: エネルギーは超越関数を含んだ方程式の根として与えられるが, その方程式は解けないので, 方程式をできるだけ簡単化するだけでよい). 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概要を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを E とおき, 領域 I, II, III で, それぞれ Schrödinger 方程式を解け (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる).

2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).

3. 点 $|x| = a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)