量子力学 I 演習 問題 (第 10回)

樋口 さぶろお*

1997 年 6 月 30 日

教科書を買っていない人のための摂動論の公式集

縮退のない場合　非摂動 Hamiltonian を H_0, その固有関数, エネルギー固有値を $\psi_1, \psi_2, \ldots,$ $E_1 < E_2 < \cdots$ とする. 摂動をうけた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, その固有関数 ϕ_n, エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(1) \quad W_n = E_n + \lambda\langle\psi_n|V|\psi_n\rangle + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{\langle\psi_n|V|\psi_k\rangle\langle\psi_k|V|\psi_n\rangle}{E_n - E_k} + \cdots ,$$

$$(2) \quad \phi_n = \psi_n + \lambda \sum_{k\neq n} \frac{\langle\psi_k|V|\psi_n\rangle}{E_n - E_k}\psi_k + \lambda^2 \times (\text{ 複雑 [1, 例題 4.1]}) + \cdots$$

(ほとんど) 縮退のある場合　非摂動 Hamiltonian を H_0, その固有関数, エネルギー固有値を $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_a, \psi_{a+1}, \ldots,$ $E_1 < E_2 < \cdots < E_a \approx E_{a+1} < \cdots$ とする. 摂動をうけた Hamiltonian を $H = H_0 + \lambda V$ とすると, $a, a+1$ に対応する 固有関数 ϕ_n, エネルギー固有値 W_n は, λ に関する巾級数として,

$$(3) \quad W_a = W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)} + \lambda^2 \sum_{k\neq a,a+1} \frac{\left\langle\phi_a^{(0)}|V|\psi_k\right\rangle\left\langle\psi_k|V|\phi_a^{(0)}\right\rangle}{W_a^{(0)} - E_k} + \cdots ,$$

$$(4) \quad \phi_a = \phi_a^{(0)} + \lambda \sum_{k\neq a,a+1} \frac{\left\langle\psi_k|V|\phi_a^{(0)}\right\rangle}{W_a^{(0)} - E_k}\psi_k + \lambda^2 \times (\text{複雑}) + \cdots .$$

---

* hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

ただし, $\phi_a^{(0)}, W_a^{(0)} + \lambda W_a^{(1)}, \phi_{a+1}^{(0)}, W_{a+1}^{(0)} + \lambda W_{a+1}^{(1)}$ は, ψ_a と ψ_{a+1} の間で対角化を行なって決める.

1 次の摂動のもとで縮退が残る場合には別の考察が必要.

[10-1] 縮退のない場合の摂動論

2 つの エネルギー固有状態を持つ系に対する摂動を考える. 無摂動状態の固有関数を基底にとったとき, 摂動をうけた系の Hamiltonian 行列を

$$H = H_0 + \lambda V = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

とする. ただし λ は摂動パラメタ.

1. $|E_1 - E_2| \gg |\lambda a|$ と仮定すると, 縮退のない場合の摂動論が使える. 摂動を受けた系のエネルギー固有値を, 摂動の 1 次, および 2 次で求めよ. 摂動を受けた系の固有関数を, 摂動の 1 次で求めよ.

2. 摂動を受けた系 $H = H_0 + \lambda V$ は実は厳密に解くことができる. 固有方程式 $\det(H - E\mathbf{1}) = 0$ を解いて, 固有値は

   $$E_\pm = \tfrac{1}{2}\left(E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\lambda^2|a|^2}\right), \tag{6}$$

   これに対応する (規格化されていない) 固有状態は, 方程式 $H\phi_\pm = E_\pm\phi_\pm$ を解いて,

   $$\phi_\pm = -\lambda a\psi_1 + \tfrac{1}{2}\left(E_1 - E_2 \mp \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\lambda^2|a|^2}\right)\psi_2. \tag{7}$$

   ここで, $\psi_1 = {}^t(1,0), \psi_2 = {}^t(0,1)$ とおいた.

   摂動論の結果を厳密解と比較せよ.

Hint. 比較するには, $|\lambda a|/|E_1 - E_2| \ll 1$ で展開する.

[10-2] 1 次元調和振動子に対する摂動

1 次元の調和振動子 $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ に摂動

1. λx 　　2. $\dfrac{1}{2}\lambda x^2$

がくわわった. 摂動論の 1 次および 2 次でエネルギー固有値を求めよ. また, 摂動を用いずに厳密に解いた結果と比較せよ [1, 例題 4.2, 問題 4-1[1]].

Hint.　行列要素の計算には, 生成消滅演算子を用いるとよい.

[10-3]　等方的な 2 次元調和振動子に対する非等方的摂動

2 次元の等方的調和振動子を考える [1, 問題 4-2[1]]:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \tag{8}$$

1. 基底エネルギーを求めよ (1 次元の調和振動子の解は知っているものとしてよい).
2. 摂動 $V = \lambda m\omega^2 xy$ ($\lambda \ll 1$) がくわわったとき, 摂動論を用いて, 基底エネルギーを λ の 2 次で求めよ.
3. 摂動のくわわった系の基底エネルギーを厳密に求めよ.

Hint. 適当に座標軸をとり直して変数分離する.

参考文献

[1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.

[2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).

[3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)