

量子力学 I 演習 問題 (第 12 回)

樋口 さぶろお*

1997 年 7 月 14 日

教科書を買っていない人のための非定常状態の摂動論

時間に依存していない非摂動 Hamiltonian H_0 に時間に依存する摂動 $\lambda V(t)$ が加わって $H = H_0 + \lambda V(t)$ となったとする ($\lambda \ll 1$). 波動関数 $\Psi(x, t)$ に対する Schrödinger 方程式は

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [H_0 + \lambda V(t)]\Psi.$$

波動関数 $\Psi(x, t)$ を, 非摂動 Hamiltonian H_0 の固有関数 $\psi_s(x)$ (エネルギー固有値 E_s) で

$$(2) \quad \Psi(x, t) = \sum_s a_s(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_s t\right) \psi_s(x)$$

と展開する. このとき a_s の時間発展を決める方程式は

$$(3) \quad \frac{da_s(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_m a_m(t) \lambda \langle \psi_s | V(t) | \psi_m \rangle \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_s - E_m) t\right)$$

である.

とくに, 時刻 $t = 0$ で系が状態 ψ_n にあったとき, 摂動の 1 次で

$$(4) \quad a_m(t) = \delta_{mn} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \lambda \langle \psi_n | V(t') | \psi_m \rangle \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) t'\right).$$

*hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/>,
へや: 駒場 4 号館 413B(学生室の隣) 氷上研究室, でんわ: (03)54.54.67.35

[12-1] 時間に依存する摂動論

2つの状態を持つ量子力学的系があり, その Hamiltonian 行列が

$$(5) \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

と書かれる. 系は時刻 $t = 0$ に, 状態 ${}^t(1, 0)$ にあった. 摂動

$$(6) \quad \lambda V(t) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \cos \omega t \\ \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} \quad (\omega \in \mathbb{R}, \lambda \ll |E_1 - E_2|)$$

が加わり全 Hamiltonian が $H = H_0 + \lambda V(t)$ となる. 時刻 $t > 0$ での状態 ${}^t(0, 1)$ の振幅を, 時刻に依存する摂動論を用いて λ の 1 次まで計算せよ. ただし, $|E_1 - E_2 \pm \hbar\omega|$ はあまり小さくないと仮定してよい.

[12-2] 指数関数的に減少する力

1次元の調和振動子

$$(7) \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

を考える. 生成消滅演算子は $b, b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x \pm \frac{ip}{m\omega} \right)$ で定義されるのだった. 系は $t < 0$ では基底状態にあった. $t > 0$ で時間に依存する摂動

$$(8) \quad \lambda V(x, t) = \lambda A x^2 \exp[-t/\tau]$$

が加わったとする.

十分時間が経過したとき ($t \gg \tau$), 系が各励起状態にある確率を, 時間に依存する摂動論の 1 次で求めよ.

[12-3] 定数的な摂動

2つのエネルギー固有状態 ψ_1, ψ_2 , (エネルギー固有値 E_1, E_2) を持つ系を考える:

$$(9) \quad H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

時刻 $t = 0$ では, 系は ψ_1 にあるとする.

摂動

$$(10) \quad \lambda V(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \lambda \times \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^* & V_{21} \end{pmatrix} & (t \geq 0) \end{cases}$$

が加わる. ただし, V_{jk} そのものは時刻によらない. 時刻 $t > 0$ で系が ψ_2 にある確率を 1 次の摂動論で求めよ. また, 系の時間発展を厳密に解き, 比較せよ.

連絡 この問題に対応する report を出す人は 7月 22 日までをお願いします. また 7 月中に, 成績に関する掲示を行ないますので, 注意して下さい. この掲示が見られない人は, あらかじめ相談に来ることをおすすめします. ただし, 樋口は 22 日まで不在です.

参考文献

- [1] 中嶋, 吉岡, 例解 量子力学演習, 物理入門コース / 演習 3 (1991) 岩波書店.
- [2] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edition, McGraw-Hill (1968).
- [3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin (1985)